ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2013
Διάρκεια 3 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) (*i*) Έστω (x_n) φθίνουσα ακολουθία αριθμών ώστε $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}+x_n)=0$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(*ii*) Έστω (x_n) ακολουθία αριθμών ώστε $|x_{n+1}-x_n| \leq 2^{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(**2**) (2 μονάδες) (*i*) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\,.$$

(*ii*) Έστω (x_n) ακολουθία με $x_n \geq 0$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.

(**3**) (2 μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(*ii*) Έστω $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση με περίοδο T. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0+\frac{T}{2})=f(x_0)$.

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \ \text{ή}\ x=0,\\ \frac{1}{q^2} & x=\pm\frac{p}{q},\ \ p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1.\end{cases}$$

(*i*) Υπολογίστε τα $\limsup_{x\to+\infty} f(x)$ και $\liminf_{x\to+\infty} f(x)$.

(*ii*) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0;

(**5**) (2 μονάδες) (*i*) **(Θεωρία)** Έστω $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με τοπικό ακρότατο στο $x_0\in(a,b)$. Δείξτε ότι $f'(x_0)=0$.

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ έχουμε

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

(**6**) (2 μονάδες) (*i*) **(Θεωρία)** Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής για παραγωγίσιμες συναρτήσεις και αποδείξτε το υποθέτοντας το θεώρημα *Rolle*.

(*ii*) Έστω $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \leq \inf_{x\in\mathbb{R}}|g'(x)|$. Δείξτε ότι $|f(x)-f(y)|\leq|g(x)-g(y)|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
