Ανάλυση Ι (Τμήμα Α)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2020
Διάρκεια 1 ώρα και 45 λεπτά. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2.5 μονάδες) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία.

(i) Εάν τα όρια $\lim_{n\to\infty} x_{2n}$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}$ υπάρχουν και ταυτίζονται, δείξτε με τον ορισμό ότι και το όριο $\lim_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει.

(ii) Εάν τα όρια $\lim_{n\to\infty} x_{2n}$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} x_{n^2}$ υπάρχουν (δεν υποθέτουμε ότι ταυτίζονται), δείξτε ότι και το όριο $\lim_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει.

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με τύπο

$$x_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίστε με αιτιολόγηση τα όρια $\limsup_{n\to\infty} x_n$ και $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

(**3**) (2 μονάδες) (i) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

(ii) Εξετάστε εάν η παρακάτω σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(**4**) (2.5 μονάδες) (i) Εάν η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική και το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(ii) Εάν η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ είναι συνεχής, δείξτε ότι είναι σταθερή.

(**5**) (3 μονάδες) (i) (Θεωρία) Έστω ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι αύξουσα. Δείξτε ότι

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής σε κατάλληλα διαστήματα.)

(ii) Δείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $p \ge 1$ ισχύει ότι

$$x^p + px^{p-1}y \le (x+y)^p \le 2^{p-1}(x^p + y^p), \qquad x, y > 0.$$
