

(1) Βρείτε τα $\inf A$, $\sup A$, των συνόλων

(i) $A = \left\{ (-1)^n + (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$

(ii) $A = \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$

(iii) $A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{n}{m}, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$

(2) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\sup(A) = -\inf(-A), \quad \inf(A) = -\sup(-A),$$

όπου $-A := \{-a, a \in A\}.$

(3) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B), \quad \sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B),$$

όπου $A \pm B := \{a \pm b, a \in A, b \in B\}.$

(4) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

(i) $\sup A = u, u \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \iff a \leq u$ για κάθε $a \in A$ και υπάρχει $a_n \in A$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = u.$

(ii) $\sup A = u$ και $u \notin A \iff a < u$ για κάθε $a \in A$ και υπάρχει γνησίως αύξουσα $a_n \in A$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = u.$

(5) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

(i) εάν $\inf(A) > 0$, τότε $\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}$, όπου $\frac{1}{A} := \{a^{-1}, a \in A\}.$

(ii) $\sup(2^A) = 2^{\sup A}$, όπου $2^A := \{2^a, a \in A\}.$

(6) Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε την (λεξικογραφική) σχέση ολικής διάταξης:

$$(a, b) \leq (c, d) \iff (a < c) \text{ ή } (a = c \text{ και } b \leq d).$$

Δείξτε ότι το $(\mathbb{R}^2, \leq)$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της συνέχειας και ότι υπάρχει άνω φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}^2, \leq)$ το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

(7)* Δείξτε ότι το σύνολο $\{\{\sqrt{n}\}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$ ($\{x\} = x - [x]$).