

(1) Δείξτε με τον ορισμό ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^4 + 1}{n^5 + 2n - 1} = 1.$$

(2) (i) Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ και $x_n > 0$ τελικά, δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = +\infty$.

(ii) Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 0$.

(3) (i) Έστω $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ και y_n φραγμένη κάτω. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

(ii) Έστω $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = +\infty$.

(4) (i) Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n = 0$ και $y_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$, δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n/n = 0$.

(ii) Είναι σωστό ότι εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ και $y_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$;

(5) Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = x.$$

Ισχύει το αντίστροφο; Ισχύει το αντίστροφο αν $x_n \geq 0$;

(6) Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \alpha \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n = \alpha$.

(7)* Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$$