ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2026

(**1**) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες έχουν όριο και υπολογίστε το.

(i) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin x_n$.

(ii) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$.

(iii) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{n + x_n}$.

$(iv)^*$ $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 1/(1 + x_n)$.

(**2**) (i) Εάν $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = x \in \overline{\mathbb{R}}$, δείξτε ότι $\lim x_n = x$.

(ii) Εάν τα όρια $\lim x_{2n}$, $\lim x_{2n+1}$, $\lim x_{n^2}$ υπάρχουν, δείξτε ότι και το όριο $\lim x_n$ υπάρχει.

(**3**) (i) Εάν $\lim x_n = 0$, δείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) τέτοια ώστε $|x_{n_k}| \leq 1/2^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Εάν η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) και $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|x_{n_k} - x| \leq 1/2^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(**4**) Δείξτε ότι μία ακολουθία δεν έχει όριο αν και μόνο αν έχει δύο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια.

(**5**) (i) Εάν η ακολουθία (x_n) ικανοποιεί $|x_{n+1} - x_n| \leq 1/n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει.

(ii) Βρείτε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $|x_{n+1} - x_n| \leq 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όμως $\lim x_n = +\infty$.

(**6**) Δείξτε ότι μία ακολουθία (x_n) συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες φυσικών (a_n), (b_n) με $\lim a_n = +\infty$ και $\lim b_n = +\infty$, έχουμε $\lim(x_{a_n} - x_{b_n}) = 0$.

(**7**)* Εξετάστε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{n}}}}.$$
