ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2026

Με $L(x_n)$ συμβολίζουμε όλα τα υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας (x_n). και με $\overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(**1**) Εάν (x_n), (y_n) φραγμένες ακολουθίες, δείξτε ότι

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n) + \liminf_{n\to\infty}(y_n) \leq \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n) + \limsup_{n\to\infty}(y_n).$$

Επίσης δείξτε με παραδείγματα ότι όλες οι ανισότητες μπορεί να είναι γνήσιες.

(**2**) (i) Για οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) δείξτε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty}(x_n).$$

(ii) Για οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) και οποιαδήποτε συγκλίνουσα (y_n), δείξτε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \limsup_{n\to\infty}(x_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n).$$

(**3**) Για οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) δείξτε ότι

(i) $\limsup_{n\to\infty}(x_n) < +\infty \Leftrightarrow \sup(x_n) < +\infty$.

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(x_n) \leq x \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x_n \leq x + \varepsilon$ τελικά.

(iii) $\limsup_{n\to\infty}(x_n) = x \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x_n \leq x + \varepsilon$ τελικά και $x_n \geq x - \varepsilon$ για άπειρα n.

(**4**) (i) Έστω (x_n) ακολουθία με σύνολο τιμών το $F = \{l_1, \ldots, l_r\}$ η οποία παίρνει όλες τις τιμές της άπειρες φορές. Δείξτε ότι $L(x_n) = F$.

(ii) Έστω $x_n = \sin(n!\pi/2026) + \sin(n\pi/2026)$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το $L(x_n)$.

(**5**) Έστω (r_n) μία αρίθμηση των ρητών στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι $L(r_n) = [0, 1]$.

(**6**) Έστω (x_n) ακολουθία, $l_m \in L(x_n)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $l_m \to l \in \overline{\mathbb{R}}$. Δείξτε ότι $l \in L(x_n)$.

(**7**)* (i) Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Δείξτε ότι $L(x_n) = [a, b]$ όπου $a := \liminf_{n\to\infty}(x_n)$ και $b := \limsup_{n\to\infty}(x_n)$ με $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

(ii) Βρείτε όλα τα υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας

$$x_n = \sqrt{n}\cos(\log n).$$
