ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Χειμερινό Εξάμηνο 2026

(**1**) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}, \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}, \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^n}, \quad x=2,3,e,$$

$$(iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^{n^2}}{n^n}, \qquad (v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^{n^2}}{n!}, \qquad (vi)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(n+1)}.$$

(**2**) Δείξτε ότι οι ακόλουθες ακολουθίες συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$:

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n,$$

$$y_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

(**3**) Έστω (a_n) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ να συγκλίνει. Δείξτε ότι συγκλίνουν και οι σειρές

$$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p \quad \text{για κάθε } p\geq 1, \qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}.$$

(**4**) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n\to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{n_k}) τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^k|a_{n_k}|<+\infty.$$

Ισχύει το ίδιο εάν $\liminf_{n\to\infty}a_n=0$;

(**5**) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ να συγκλίνει. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι η υπόθεση της μονοτονίας δεν μπορεί να παραλειφθεί.

(**6**) Έστω $A=\{a_1<a_2<\cdots\}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων που δεν περιέχουν το ψηφίο 0 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

(**7**)* Έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_1=1, \qquad a_{n+1}=\sin a_n \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.
