ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Χειμερινό Εξάμηνο 2026

(**1**) Βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{\log n}.$$

(**2**) Δείξτε ότι οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^3}{n}, \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right).$$

(**3**) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} = +\infty.$$

(**4**) Έστω (a_n) περιοδική ακολουθία πραγματικών αριθμών με περίοδο $r \in \mathbb{N}$, δηλαδή $a_{n+r} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ συγκλίνει στο } \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} a_k = 0.$$

(**5**) (i) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$ και

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \right| < +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

(ii) Δείξτε ότι η δεύτερη από τις παραπάνω συνθήκες ικανοποιείται αν η (a_n) είναι μονότονη και $a_n \to 0$.

(**6**) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \sqrt{n}}{n}.$$

(**7**)* (i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (ϵ_n) με $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$, τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n} = x.$$

(ii) Δείξτε το ίδιο για κάθε $x > 0$, με $\epsilon_n \in \{0, 1\}$.
