# Ανάλυση Ι

**Πρόοδος 2026**

**Διάρκεια 2 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά από μία ώρα.**
**Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.**[1]
**Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!**

---

(**1**) (2 μονάδες) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δείξτε ότι

(*i*) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+1} = 1.$

(*ii*) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$.

---

(**2**) (2.5 μονάδες) (*i*) Έστω $x_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε τα $\limsup_{n\to\infty} x_n$ και $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

(*ii*) Έστω $(x_n)$ ακολουθία με $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})$ τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = 0$.

---

(**3**) (2 μονάδες) (*i*) (Θεωρία) Δείξτε ότι κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(*ii*) Δείξτε ότι η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο $x \in [0,1]$

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

---

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $(x_n)$ η ακολουθία που ορίζεται από $x_1 = 1$ και

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} \dfrac{(2026)^n}{n!}, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{(1+1/n^2)^{n^2}}{3}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

---

(**5**) (2.5 μονάδες) Έστω $(x_n)$ η ακολουθία που ορίζεται από $x_1 = 0$ και $x_{n+1} = \dfrac{1}{2+x_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Δείξτε ότι η $(x_n)$ **δεν** είναι μονότονη.

(*ii*) Δείξτε ότι $|x_{n+1} - x_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*) Δείξτε ότι η $(x_n)$ συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

---

[1] Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση **αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής** επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο **αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα** του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.