Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(**1**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

(i) Δείξτε ότι εάν $t_n \to 0$ τότε $f(x+t_n) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

(ii) Δείξτε ότι $\lim_{t\to 0}\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|\,dx = 0$.

(**2**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε φραγμένο διάστημα.

(**3**) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και $p_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

(**4**) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{1}{n+2019}, \quad n = 0,1,\ldots.$$

(**5**) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και $p_n(a) = f(a)$, $n \in \mathbb{N}$. Μπορείτε επιπλέον να απαιτήσετε $p_n(b) = f(b)$, $n \in \mathbb{N}$;

(**6**) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με ρητούς συντελεστές ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα. Μπορούμε να απαιτήσουμε τα πολυώνυμα να έχουν ακέραιους συντελετές;

(**7**)* Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-1}^1 x^{2k} f(x)\,dx = 0, \quad k = 0,1,\ldots.$$
