

Ανάλυση II

Τελικό Διαγώνισμα, Ιούνιος 2025

Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (1.5 μονάδες) Εξετάστε αν η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ και αν η $g(x) = \cos(x^2)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(2) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & x \in (0, 1], \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

είναι *Riemman*-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1]$.

(3) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι για κάθε $a \in (0, 1)$ η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = nx(1-x)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, 1]$, και ότι δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

(ii) Έαν g είναι *Riemman*-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \int_0^1 \cos(x)(1 - \cos(x))^n g(x) dx.$$

(4) (3 μονάδες) Ορίζουμε τη συνάρτηση $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

(i) Δείξτε ότι η f είναι καλά ορισμένη (δηλαδή η σειρά συγκλίνει στο $[0, 1)$), συνεχής στο $[0, 1)$, και εκφράστε (με αιτιολόγηση) το ολοκλήρωμα $\int_0^{1/2} f(x) dx$ ως σειρά αριθμών.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\max_{x \in [0, 1/2]} |f(x) - p(x)| \leq 0.01$, όμως δεν υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\sup_{x \in [0, 1)} |f(x) - p(x)| \leq 1$.

(5) (3 μονάδες) (i) Στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τη συνηθισμένη μετρική. Εξετάστε ποιό από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστό ή/και συμπαγές

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + 1/n], \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^{20} + |y|^{25} \leq 2\}.$$

(ii) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C = \{x \in X : d(x, x_0) > 1\}$$

είναι ανοιχτό. Δείξτε επίσης ότι το συμπλήρωμά του είναι κλειστό, δεν είναι όμως πάντα συμπαγές.

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.