

Ανάλυση II

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2025

Διάρκεια 2 ώρα και 30 λεπτά. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2.5 μονάδες) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(i) Εξετάστε εάν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$ και *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(ii) Εξηγήστε γιατί η συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι καλά ορισμένη για $x \in [0, 1]$ και εξετάστε εάν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

(2) (2 μονάδες) (i) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *Riemann*-ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $f(r) = 0$ για κάθε $r \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(ii) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ισχύει το ίδιο εάν η f είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη;

(3) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0, 1]$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \rightarrow e^{x^2}$ ομοιόμορφα σε **κάθε** φραγμένο υποδιάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \rightarrow e^{x^2}$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

(4) (2.5 μονάδες) (i) Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ότι $f'(x) = e^{-x}/(e^{-x} + 1)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(iii) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = -\log(1 - e^{-x}) + c$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(5) (2.5 μονάδες) (i) Εξετάστε εάν τα

$$A = \{(1/m, 1/n) : m, n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 \in [0, 1]\},$$

είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη μετρική και με τη διακριτή μετρική.

(ii) Εάν A, B συμπαγή υποσύνολα μετρικού χώρου (X, d) δείξτε ότι και το σύνολο $A \cup B$ είναι συμπαγές.