Ανάλυση ΙΙ

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025

(1) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

(i) $f(x) = \log x$ στο $(0,1)$ και στο $[1,+\infty)$.

(ii) $f(x) = x\log x$ στο $(0,1)$ και στο $[1,+\infty)$.

(iii) $f(x) = \sin x$ στο $\mathbb{R}$.

(iv) $f(x) = x\sin x$ στο $\mathbb{R}$.

---

(2) Για ποια $a \in \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f(x) = x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$;

---

(3) (i) Για ποια $k \in \mathbb{N}$ είναι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^k}{x^{2025}+1}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$;

(ii) Έστω P, Q πολυώνυμα ώστε $Q(x) \neq 0$ για $x \geq a$. Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,+\infty)$.

---

(4) (i) Έστω I διάστημα και $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε με δύο τρόπους ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(ii) Ισχύει το ίδιο για το γινόμενο των f και g; Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι μία από τις δύο συναρτήσεις είναι φραγμένη στο I; Αν και οι δύο συναρτήσεις είναι φραγμένες στο I;

---

(5) (i) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, μονότονη, και φραγμένη. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(ii) Βρείτε παράδειγμα συνάρτησης $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και φραγμένη όμως δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

---

(6) (i) Έστω I διάστημα και $f\colon I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και *Lip*-συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f' είναι φραγμένη στο I.

$(ii)^*$ Υπάρχει συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι φραγμένη, παραγωγίσιμη, και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν είναι όμως *Lip*-συνεχής στο $\mathbb{R}$; Εάν επιπλέον υποθέσουμε πως η f είναι αύξουσα;

---

(7) (i) Για ποια $a \in \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f(x) = \sin(x^a)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$;

$(ii)^*$ Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ και η συνάρτηση $g(x) = \sin(f(x))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$;
