

10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025

(1) Για καθένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη μετρική εξετάστε αν είναι ανοιχτά, κλειστά, συμπαγή, και βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορό τους, και ελέγξτε αν η κλειστότητά είναι συμπαγές σύνολο.

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2025} + |y|^{2025} < 1\}$.

(ii) $B = \{(x, y) \in A : x, y \in \mathbb{Q}\}$.

(iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

(2) (i) Έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ και $f : A \rightarrow (0, +\infty)$ συνεχής (με τη συνηθισμένη μετρική στον $\mathbb{R}^2$). Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοια ώστε $a \leq f(x) \leq b$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοια ώστε

$$a(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq (|x|^3 + 2|y|^3)^{\frac{1}{3}} \leq b(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

(3) Έστω $A_n, n \in \mathbb{N}$, κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική. Εάν $A_n \subset [n, +\infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι και το σύνολο $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κλειστό.

(4) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ με $x_n \rightarrow^d x$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x, x_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

(5) Έστω A μη κενό σύνολο σε μετρικό χώρο (X, d) . Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο $f(x) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ είναι συνεχής και $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

(6) Δείξτε ότι κάθε κλειστό σύνολο σε μετρικό χώρο (X, d) μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων και κάθε ανοιχτό μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών.

(Υπόδειξη: Αν A κλειστό, θεωρείστε τα σύνολα $A_n = \{x \in X : f_A(x) < \frac{1}{n}\}$ όπου f_A η συνάρτηση της Ασκήσης 5.)

(7)* Έστω A, B ξένα κλειστά σύνολα σε μετρικό χώρο (X, d) . Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανοιχτά σύνολα U, V ώστε $A \subset U$ και $B \subset V$.