

(1) (i) Δείξτε ότι $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2025} + |y|^{2025} \leq 1\}$, $A^\circ = A$, $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2025} + |y|^{2025} = 1\}$, το A είναι ανοιχτό όχι όμως κλειστό. Το σύνολο $\bar{A}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ άρα συμπαγές.

(ii) Δείξτε ότι $\bar{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2025} + |y|^{2025} \leq 1\}$, $B^\circ = \emptyset$, $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2025} + |y|^{2025} \leq 1\}$, το B δεν είναι κλειστό ούτε ανοιχτό. Το σύνολο $\bar{B}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ άρα συμπαγές.

(iii) Δείξτε ότι $\bar{C} = \mathbb{R}^2$, $C^\circ = \emptyset$, $\partial C = \mathbb{R}^2$, το C δεν είναι κλειστό ούτε ανοιχτό. Για να δείξετε ότι $\bar{C} = \mathbb{R}^2$ χρησιμοποιήστε ακολουθίες της μορφής $(x_n, y_n + \frac{\sqrt{2}}{n})$ με $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ για να προσεγγίσετε οποιοδήποτε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Το σύνολο $\bar{C}$ δεν είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ άρα δεν είναι συμπαγές.

(2) (i) Το σύνολο A είναι συμπαγές και η f είναι συνεχής στο A οπότε λαμβάνει ελάχιστη τιμή a και μέγιστη τιμή b στο A τα οποία και τα δύο είναι θετικοί αριθμοί αφού η f παίρνει θετικές τιμές στο A .

(ii) Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοια ώστε

$$a \leq \left(\frac{|x|}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^3 + 2 \left(\frac{|y|}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^3 \leq b \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Εάν $X := |x|/(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ και $Y := |y|/(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ δείξτε ότι $X^2 + Y^2 = 1$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει εφαρμόζοντας το (i) στη συνεχή συνάρτηση $f(x, y) := |x|^3 + 2|y|^3$, η οποία παίρνει θετικές τιμές στο μοναδιαίο κύκλο.

(3) Έστω $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \rightarrow x$. Τότε η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$. Επομένως, υπάρχει $k \in \{1, \dots, n_0\}$ ώστε $x_n \in A_k$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, και άρα υπάρχει υποακολουθία $(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ ώστε $x_{n_m} \in A_k$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αφού $x_{n_m} \rightarrow x$ και A_k κλειστό, έχουμε $x \in A_k$, και άρα $x \in A$. Επομένως το A είναι κλειστό.

(4) Έστω $y_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Εάν η y_n παίρνει άπειρες τιμές, τότε υπάρχει υποακολουθία y_{n_k} της y_n με διαφορετικούς όρους, στην οποία περίπτωση έχουμε $y_{n_k} \rightarrow^d x \in A$. Εάν η y_n παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές, τότε υπάρχει $y \in A$ και υποακολουθία y_{n_k} της y_n τέτοια ώστε $y_{n_k} = y$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $y_{n_k} \rightarrow^d y \in A$.

(5) Για τη συνέχεια αρκεί να δείξουμε ότι $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$ για κάθε $x, x' \in X$. Έστω $x, x' \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in A$ ώστε $d(x, y) \leq f(x) + \varepsilon$. Τότε $f(x') \leq d(x', y) \leq d(x, x') + d(x, y) \leq d(x, x') + f(x) + \varepsilon$. Επομένως $f(x') - f(x) \leq d(x, x') + \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έχουμε $f(x') - f(x) \leq d(x, x')$. Παρόμοια, $f(x) - f(x') \leq d(x, x')$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$.

Τέλος παρατηρούμε ότι $f(x) = 0$ ανν υπάρχουν $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, με $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν υπάρχουν $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, με $x_n \rightarrow^d x$, δηλαδή αν $x \in \bar{A}$.

(6) Έστω A κλειστό. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = \{x \in X : f_A(x) < \frac{1}{n}\}$ όπου f_A η συνάρτηση της Ασκήσης 5. Η f_A είναι συνεχής και $A_n = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{n}))$, άρα το A_n είναι ανοιχτό υποσύνολο του X . Αφού το A είναι κλειστό εύκολα δείχνουμε ότι $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Έστω τώρα A ανοιχτό υποσύνολο του X . Τότε το A^c είναι κλειστό και από τα προηγούμενα υπάρχουν $A_n, n \in \mathbb{N}$, ανοιχτά υποσύνολα του X , ώστε $A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ και τα A_n^c είναι κλειστά υποσύνολα του X .

(7)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
