Ανάλυση ΙΙ

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025
Αναλυτικές Υποδείξεις.

(**1**) (i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$. Η f' είναι φραγμένη στο $[1,+\infty)$, άρα η f είναι (Lip-συνεχής και άρα) ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$.

(ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ και f συνεχής στο $(0,1]$, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1]$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$ (αφού δεν υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $f(x) \leq Ax + B$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$).

(iii) Η f' είναι φραγμένη, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(iv) Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες δείξτε ότι $f\big(2\pi n + \frac{1}{n}\big) - f(2\pi n) \not\to 0$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(**2**) Έστω $a \leq 0$. Το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Έστω $a \in (0,2]$. Το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχει και η f είναι συνεχής στο $(0,1]$, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1]$. Επίσης η f' είναι φραγμένη στο $[1,+\infty)$, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$

Έστω $a \in (2,+\infty)$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$.

(**3**) (i) Εάν $1 \leq k \leq 2026$, δείξτε ότι η f' είναι φραγμένη, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Εάν $k \geq 2027$, δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$.

(ii) Όπως στο (i) δείξτε ότι f η είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,+\infty)$ αν και μόνο αν $\deg(P) \leq \deg(Q) + 1$.

(**4**) (i) 1η Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε εάν $|x-y| < \delta$ και $x, y \in I$, έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε εάν $|x-y| < \delta$ και $x, y \in I$, έχουμε

$$|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2η Απόδειξη. Έστω $x_n, y_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$, με $x_n - y_n \to 0$. Αφού οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I, έχουμε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ και $g(x_n) - g(y_n) \to 0$. Οπότε

$$|f(x_n) + g(x_n) - (f(y_n) + g(y_n))| \leq |f(x_n) - f(y_n)| + |g(x_n) - g(y_n)| \to 0$$

και συμπεραίνουμε ότι $(f+g)(x_n) - (f+g)(y_n) \to 0$.

(ii) 1ο Ερώτημα: Οχι, πχ για $f(x) = g(x) = x$.

2ο Ερώτημα: Οχι, πχ για $f(x) = x, g(x) = \sin x$ (δες άσκηση 1 ερώτημα (iii) και (iv)).

3ο Ερώτημα: Ναί. 1η Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $M > 0$ άνω φράγμα των f και g στο I. Αφού οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε εάν $|x - y| < \delta$ και $x, y \in I$, έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ και $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Τότε εάν $|x - y| < \delta$ και $x, y \in I$, έχουμε

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

2η Απόδειξη. Έστω $x_n, y_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$, με $x_n - y_n \to 0$. Έστω $M > 0$ άνω φράγμα των f και g στο I. Αφού οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I, έχουμε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ και $g(x_n) - g(y_n) \to 0$. Οπότε

$$\begin{aligned} |f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n)| &\leq |f(x_n)||g(x_n) - g(y_n)| + |g(y_n)||f(x_n) - f(y_n)| \\ &\leq M\,|g(x_n) - g(y_n)| + M\,|f(x_n) - f(y_n)| \to 0 \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι $(fg)(x_n) - (fg)(y_n) \to 0$.

(**5**) (i) Από τις υποθέσεις συμπεραίνουμε πως τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ υπάρχουν και αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(ii) Η $f(x) = \sin(x^2)$ είναι μία τέτοια συνάρτηση (δες 'σκηση 7(i)), όμως είναι πιο χρήσιμο να δούμε και μία ποιο ευέλικτη κατασκευή που εφαρμόζεται και σε άλλες περιπτώσεις, όπου τύπος συγκεκριμένης συνάρτησης είναι πιο δύσκολο να βρεθεί.

Κατασκευάζουμε την συνεχή $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής: Η f είναι 0 για τα x που δεν ανήκουν σε κανένα από τα διαστήματα $[n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}]$, $n \geq 2$, ενώ στα διαστήματα $[n - \frac{1}{n}, n]$ η f αυξάνει γραμμικά από το 0 στο 1 και στα διαστήματα $[n, n + \frac{1}{n}]$ φθίνει γραμμικά από το 1 στο 0. Η f είναι προφανώς φραγμένη από το 1. Επίσης $f(n) - f(n - \frac{1}{n}) = 1 \not\to 0$ και $(n - \frac{1}{n}) - n \to 0$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(**6**) (i) Από υπόθεση υπάρχει $L > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ για κάθε $x, y \in I$. Τότε για κάθε x όχι άκρο του I έχουμε $|f'(x)| = \lim_{y\to x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq L$. Για τα (πιθανά) άκρα του I το επιχείρημα είναι ανάλογο (δουλεύουμε με πλευρικά όρια).

$(ii)^*$ Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.

(**7**) (i) Έστω $a \leq 1$. Η f' είναι φραγμένη στο $[1, +\infty)$, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$.

Έστω $a > 1$. Τότε για $x_n = \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, $y_n = \left(2\pi n\right)^{\frac{1}{a}}$, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε, $x_n, y_n \to +\infty$ και $x_n - y_n \to 0$ (ΘΜΤ στο $[2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$, εδώ χρειάζεται ότι $a > 1$) όμως $f(x_n) - f(y_n) = 1 \not\to 0$. 'ρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$.

$(ii)^*$ Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποιος/κάποια την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση του/της γραπτώς για να τον/την συγχαρώ.
