# Ανάλυση ΙΙ

## 2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025
## Αναλυτικές Υποδείξεις.

---

(**1**) Δες σημειώσεις Μήτση άσκηση 7.2 σελίδα 110.

---

(**2**) Έστω $P = \{x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ διαμέριση του $[0,1]$. Χρησιμοποιώντας ότι υπάρχουν άρρητοι σε κάθε διάστημα, έχουμε $L(f,P) = 0$. Επομένως $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$.

Θα δείξουμε ότι $U(f,P) \geq \frac{1}{4}$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\frac{1}{2} \in P$, τότε $x_{k_0} = \frac{1}{2}$ για κάποιο $k_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$. Χρησιμοποιώντας ότι υπάρχουν ρητοί σε κάθε διάστημα, έχουμε $M_k \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $k \in \{k_0, \ldots, n-1\}$. Επομένως

$$U(f,P) \geq \sum_{k=k_0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{4}$$

Γενικά μπορεί να μην έχουμε ότι $\frac{1}{2} \in P$, όμως αφού η $P \cup \frac{1}{2}$ είναι εκλέπτυνση της $P$, έχουμε $U(f,P) \geq U(f, P \cup \frac{1}{2}) \geq \frac{1}{4}$. Επομένως, $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx \geq \frac{1}{4}$.

Αφού $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx$, η $f$ δεν είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

---

(**3**) 1η Απόδειξη: Δες σημειώσεις Μήτση άσκηση 7.8 σελίδα 112.

2η Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που η συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ διαφέρει από την $f$ σε μία τιμή, έστω στο $x_0 \in [0,1]$. Έστω $M$ ένα άνω φράγμα των $|f|$ και $|g|$. Αφού η $f$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ υπάρχουν διαμερίσεις $P_n$, $n \in \mathbb{N}$, του $[0,1]$ με πλάτος $d_n \to 0$, ώστε $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $x_0$ ανήκει το πολύ σε δύο από τα υποδιαστήματα της $P_n$ και στα υπόλοιπα υποδιαστήματα οι $f$ και $g$ ταυτίζονται. Συνεπώς $|U(f,P_n) - U(g,P_n)| \leq 2Md_n$ και $|L(f,P_n) - L(g,P_n)| \leq 2Md_n$. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα παίρνουμε ότι

$$0 \leq U(g,P_n) - L(g,P_n) \leq U(f,P_n) - L(f,P_n) + 4Md_n \to 0.$$

’ρα η $g$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επίσης έχουμε

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(g,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

---

(**4**) ($i$) Δες σημειώσεις Μήτση άσκηση 7.7 σελίδα 112.

($ii$) 1η Απόδειξη: Από το ($i$) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $a > 0$ έχουμε $\int_a^1 f(x)\,dx = 0$. Όμως στο $[a,1]$ η $f$ διαφέρει από την ταυτοτικά 0 συνάρτηση μόνο σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία, άρα από την άσκηση 3 έχουμε $\int_a^1 f(x)\,dx = 0$.

2η Απόδειξη: Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση $P_n$ που περιλαμβάνει τα σημεία $0, \frac{1}{n}$, καθώς και $n^2$ σημεία τα οποία διαμερίζουν ομοιόμορφα το διάστημα $[\frac{1}{n}, 1]$. Είναι εύκολο να δείξετε ότι $L(f, P_n) = 0$ και $U(f, P_n) \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = 0$ και το ζητούμενο έπεται άμεσα.

---

(**5**) $(i)$ Από υπόθεση υπάρχουν διαμερίσεις $P_n$, $n \in \mathbb{N}$, του $[a, b]$ ώστε $U(f, P_n) - L(f, P_n) \to 0$. Προσθέτοντας τα σημεία $c, d$ στις $P_n$ παίρνουμε εκλεπτύνσεις $\tilde{P}_n$ των $P_n$ που επίσης ικανοποιούν $U(f, \tilde{P}_n) - L(f, \tilde{P}_n) \to 0$. Θεωρώντας μόνο τα σημεία των $\tilde{P}_n$ που ανήκουν στο $[c, d]$ παίρνουμε διαμερίσεις $Q_n$ του $[c, d]$ και είναι άμεσο ότι $U(f, Q_n) - L(f, Q_n) \leq U(f, \tilde{P}_n) - L(f, \tilde{P}_n)$. Επομένως έχουμε $U(f, Q_n) - L(Q, P_n) \to 0$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

$(ii)$ Έστω ότι $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in [a, b]$ και υποθέτουμε πως $f(x_0) > g(x_0)$ (η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια). Χρησιμοποιώντας την συνέχεια των $f, g$ δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$ ώστε $f(x) \geq g(y) + \varepsilon$ για κάθε $x, y \in [c, d]$. Από αυτό συμπεραίνουμε εύκολα ότι για κάθε διαμέριση $P$ του $[c, d]$ έχουμε $U(h, P) \geq L(h, P) + \varepsilon(d - c)$. Επομένως $\overline{\int_c^d} h(x)\, dx \geq \underline{\int_c^d} h(x)\, dx + \varepsilon(d - c)$, από το οποίο έπεται ότι η $h$ δεν είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεσή μας και το $(i)$.

---

(**6**) Δες σημειώσεις Μήτση άσκηση 7.4 σελίδα 111.

---

(**7**) $(i)$ Δες σημειώσεις Μήτση άσκηση 7.3 σελίδα 110. Θα το αποδείξουμε και στην τάξη.

$(ii)^*$ Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.

---