Ανάλυση ΙΙ

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025

(**1**) Εξετάστε για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^a \sin x & x \in (0,1], \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(**2**) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση *Lipschitz* με *Lip*-σταθερά $L > 0$, δηλαδή η f ικανοποιεί $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ για κάθε $x, y \in [0,1]$.

(*i*) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{L}{n}$.

Υπόδειξη: Αρχικά δείξτε ότι το αριστερό μέλος είναι ίσο με $\left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx \right|$.

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $p \geq 1$ έχουμε $\left| \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p - \frac{1}{p+1} \right| \leq \frac{p}{n}$.

(**3**) Έστω $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά 0 στο $[a,b]$. Ισχύει το ίδιο εάν υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη (άντι για συνεχής) στο $[a,b]$;

(**4**) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Εάν η συνάρτηση $g = f^2$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, μπορούμε να συμπεράνουμε το ίδιο και για την f; Απαντήστε το ίδιο ερώτημα εάν υποθέσουμε ότι η $g = e^f$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(**5**) Αποδείξτε την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$, δείξτε δηλαδή ότι εάν $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\,dx.$$

Υπόδειξη: $\int_a^b (f(x) + tg(x))^2\,dx \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(**6**) Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Εάν $n > m$ δείξτε ότι $|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k}\right) dx$.

(*ii*) Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει.

(**7**) (*i*) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *Riemann*-ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$.

(*ii*)* Υπάρχει συνεχής $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ που να ικανοποιεί

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{1}{2^n} \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
