

Ανάλυση ΙΙ

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025 Αναλυτικές Υποδείξεις.

(1) Για $a < -1$ δείξτε ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[0, 1]$, άρα δεν είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Για $a \geq -1$ δείξτε ότι η f διαφέρει από μία συνεχή συνάρτηση στο $[0, 1]$ το πολύ σε ένα σημείο, άρα είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(2) (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx.$$

Επίσης από την υπόθεσή μας έχουμε $|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq L|x - \frac{k}{n}|$. Άρα το δεξί μέλος της προηγούμενης ανισότητας είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} L \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{L}{n} \frac{1}{n} = \frac{L}{n}.$$

(ii) Χρησιμοποιήστε το (i) για $f(t) = t^p$ αφού πρώτα δείξετε ότι μπορείτε να πάρετε $L = p$.

(3) Έστω ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε χρησιμοποιώντας την συνέχεια της f βρίσκουμε διάστημα $[c, d] \subset [a, b]$ και $m > 0$ ώστε $f(x) \geq m > 0$ για κάθε $x \in [c, d]$. Τότε

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq m(d - c) > 0,$$

άτοπο από υπόθεση.

Για ολοκληρώσιμη f το συμπέρασμα δεν είναι σωστό, θεωρήστε πχ f η οποία είναι 0 εκτός από ένα σημείο.

(4) (i) Όχι. Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, όμως $f^2 = 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(ii) Ναι. Έχουμε $m \leq g = e^f \leq M$ στο $[a, b]$ για κάποια $m, M > 0$. Η συνάρτηση $h(x) = \log x$ είναι συνεχής στο $[m, M]$, άρα από γνωστό θεώρημα η $h \circ g = f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(5) Έχουμε δει ότι η $f^2, g^2, fg, (f + tg)^2$, είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμες για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\int_a^b (f + tg)^2 dx \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, άρα $\int_a^b f^2 dx \cdot t^2 + 2 \int_a^b f \cdot g dx \cdot t + \int_a^b g^2 dx \geq 0$. Επομένως η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, και η ζητούμενη ανισότητα προκύπτει άμεσα.

(6) (i) Έχουμε $x_n = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx - \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$, οπότε

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx - \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx,$$

και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι η (x_n) είναι *Cauchy*. Από το (i) για $n > m$ έχουμε ότι

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) dx \leq \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει εύκολα ότι η ακολουθία (x_n) είναι *Cauchy*.

(7) (i) Η f είναι φραγμένη άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Έχουμε

$$\left| \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |x^n f(x)| dx \leq M \int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$. Εάν δεν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ (γιατί δεν τον έχουμε αποδείξει ακόμη) τότε χρησιμοποιούμε ότι

$$\int_0^1 x^n dx = \int_0^a x^n dx + \int_a^1 x^n dx \leq \int_0^a a^n dx + \int_a^1 1 dx = a^{n+1} + (1-a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1-a$$

το οποίο ισχύει για αυθαίρετο $a \in (0, 1)$. Παίρνοντας $a \rightarrow 1^-$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = 0$.

(ii)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
