Ανάλυση II

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025

---

(1) Δείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} (-1)^{[1/x]}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και υπολογίστε το $\int_0^1 f(x)\,dx$.

---

(2) Βρείτε όλες τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

---

(3) Έστω $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *Riemann*-ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$. Δείξτε ότι

(*i*) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$.

(*ii*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = L$. (Μπορείτε να υποθέσετε ότι η f είναι συνεχής.)

---

(4) Έστω $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$f(x) \leq \Big(\int_0^1 (f'(t))^2\,dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

---

(5) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο και $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

---

(6) Έστω $f\colon [a,b] \to [0,+\infty)$ συνεχής και $M = \max\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b (f(x))^n\,dx \Big)^{\frac{1}{n}} = M.$$

---

(7)* Έστω $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχουν $g, h\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες, αύξουσες, και θετικές συναρτήσεις, ώστε $f = g - h$.
