Ανάλυση ΙΙ

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025
Αναλυτικές Υποδείξεις.

(**1**) Έχουμε ότι $f(x) = (-1)^n$ για $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$ και ολοκληρώσιμη στο $[a,1]$ για κάθε $a \in (0,1)$ έχουμε δει ότι $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{\frac{1}{N}}^1 f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$. Επομένως

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - 2\log 2.$$

(**2**) Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού η $\int_0^x f(t)\,dt$ είναι συνεχής ως προς x, η ταυτότητα δίνει το ίδιο για την f. Επιπλέον, το ΘΘΙ δίνει ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Οπότε παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας το ΘΘΙ έχουμε $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης $f(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ άρα $c = 0$.

(**3**) (i) Από τον ορισμό του ορίου παίρνουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) > L/2$ για κάθε $x \geq M$. Οπότε για $x \geq M$ έχουμε

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^M f(x)\,dx + \int_M^x f(x)\,dx \geq \int_0^M f(x)\,dx + \frac{L}{2}(x-M).$$

Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) Από το (i) προκύπτει ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Εφαρμόζοντας τον κανόνα $l'Hospital$ και το ΘΘΙ (η f να είναι συνεχής άρα ο αριθμητής να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση) παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Χρησιμοποιώντας ανισότητες όπως στο (i), προσπαθήστε να αποδείξετε το ίδιο υποθέτοντας μόνο ότι η f είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη.

(**4**) Από το ΘΘΙΙ έχουμε $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\,dx$. Οπότε εφαρμόζοντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ έχουμε

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\cdot 1\,dt \leq \Big(\int_0^x (f'(t))^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^x 1^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_0^1 (f'(t))^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

για κάθε $x \in [0,1]$.

---

(5) Από το ΘΘΙΙ και βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,dx \Big| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big|f'(x)\big|\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

---

(6) Έστω $a_n = \left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, έχουμε

$$a_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}} \to M.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού f συνεχής στο $[a,b]$ υπάρχει διάστημα $I \subset [a,b]$, μήκους $l > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq M - \varepsilon$ για κάθε $x \in I$. Οπότε

$$a_n \geq \left(\int_I (f(x))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon)l^{\frac{1}{n}} \to M - \varepsilon.$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα.

---

(7)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
