## Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

---

## 5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

---

(**1**) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:

$(i)$ $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, στο $[0,1]$ και στο $\mathbb{R}$.

$(ii)$ $f_n(x) = x(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, στο $[0,1]$.

$(iii)$ $f_n(x) = n\left[\frac{x}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, στο $[1,+\infty)$.

---

(**2**) Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{n^2 e^x}{n^2+x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο διάστημα και υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2 e^x}{n^2+x^2}\, dx$.

---

(**3**) $(i)$ Δείξτε ότι $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$. (Πάρτε ως δεδομένο ότι για κάθε $x \in [0,1]$ η ακολουθία $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ αυξάνει στο $e^x$.)

$(ii)$ Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n dx$.

---

(**4**) $(i)$ Δείξτε ότι αν μία ακολουθία πολυωνύμων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει συγκλίνουσα ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και πολυώνυμο $P$, ώστε $P_n = P + c_n$ τελικά.

$(ii)$ Συμπεράνετε ότι αν μία ακολουθία πολυωνύμων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε το όριο είναι πολυώνυμο.

---

(**5**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $f_n(x) = f(x+\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

---

(**6**) Έστω $f_n, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συναρτήσεις και $f$ συνεχής. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in [a,b]$ και $x_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, με $x_n \to x$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

---

(**7**)$^*$ Έστω $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις ώστε $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, και $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Δείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

---