

(1) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(i) Δείξτε ότι εάν $t_n \rightarrow 0$ τότε $f(x + t_n) \rightarrow f(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

(ii) Δείξτε ότι $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 |f(x + t) - f(x)| dx = 0$.

(2) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε φραγμένο διάστημα.

(3) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και $p'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

(4) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{1}{n + 2025}, \quad n = 0, 1, \dots$$

(5) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και $p_n(a) = f(a)$, $n \in \mathbb{N}$. Μπορείτε επιπλέον να απαιτήσετε $p_n(b) = f(b)$, $n \in \mathbb{N}$;

(6) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με ρητούς συντελεστές ώστε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα. Μπορούμε να απαιτήσουμε τα πολυώνυμα να έχουν ακέραιους συντελεστές;

(7)* Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-1}^1 x^{2k} f(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$
