

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025
Αναλυτικές Υποδείξεις.

(1) (i) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-1, 2]$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε εάν $|x - y| < \delta$, $x, y \in [-1, 2]$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|t_n| < \delta$ για $n > n_0$. Για αυτά τα n και για $x \in [0, 1]$ έχουμε $|x + t_n - x| < \delta$ και $x + t_n \in [-1, 2]$, οπότε $|f(x + t_n) - f(x)| < \varepsilon$.

(ii) Από τον ισοδύναμο ακολουθιακό ορισμό του ορίου, αρκεί να δείξουμε ότι εάν $t_n \rightarrow 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x + t_n) - f(x)| dx = 0$. Αυτό προκύπτει από το (i) και γνωστό θεώρημα.

(2) Δεδομένου $n \in \mathbb{N}$, από το θεώρημα *Weierstrass* υπάρχει πολυώνυμο p_n τέτοιο ώστε $\|f - p_n\|_{[-n, n]} \leq \frac{1}{n}$. Τότε για κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ για $n \geq \max\{|a|, |b|\}$ έχουμε $\|f - p_n\|_{[a, b]} \leq \|f - p_n\|_{[-n, n]} \leq \frac{1}{n}$. Επομένως, $\|f - p_n\|_{[a, b]} \rightarrow 0$.

(3) Από το θεώρημα *Weierstrass* υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $q_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Θέτουμε $p_n(x) = \int_a^x q_n(t) dt + f(a)$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Από το ΘΘΠ έχουμε $\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$, επομένως

$$|p_n(x) - f(x)| = \left| \int_a^x (q_n(t) - f'(t)) dt \right| \leq \|f' - q_n\|_{[a, b]} (b - a).$$

Αφού $\|f' - q_n\|_{[a, b]} \rightarrow 0$, έχουμε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Επίσης από το ΘΘΙ έχουμε $p'_n = q_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

(4) Εάν $g(x) = f(x) - x^{2024}$, έχουμε $\int_0^1 x^n g(x) dx = 0$ για $n = 0, 1, \dots$. Από γνωστό αποτέλεσμα (που αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Weierstrass*) έχουμε $g(x) = 0$. Επομένως, $f(x) = x^{2024}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(5) Από το θεώρημα *Weierstrass* υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $q_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Θέτουμε $p_n(x) = q_n(x) + f(a) - q_n(a)$. Παρατηρήστε ότι $p_n(a) = f(a)$, $n \in \mathbb{N}$. Αφού $q_n(a) \rightarrow f(a)$, έχουμε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Για το τελευταίο ερώτημα, ψάχνουμε για $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $p_n(x) = q_n(x) + a_n x + b_n$ να ικανοποιούν $p_n(a) = f(a)$, $p_n(b) = f(b)$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε τις τιμές των a_n, b_n και έτσι προκύπτει ότι

$$p_n(x) = q_n(x) + f(a) - q_n(a) + \frac{x - a}{b - a} (f(b) - q_n(b) - f(a) + q_n(a)).$$

Παρατηρήστε ότι $p_n(a) = f(a)$, $p_n(b) = f(b)$, $n \in \mathbb{N}$. Αφού $q_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και $q_n(a) \rightarrow f(a)$, $q_n(b) \rightarrow f(b)$, έχουμε $p_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

(6) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο q με ρητούς συντελεστές ώστε $\|f - q\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα *Weierstrass* υπάρχει πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$ ώστε $\|f - p\|_{[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Αφού οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς, για $k = 0, \dots, n$ υπάρχουν $r_k \in \mathbb{Q}$ ώστε $|a_k - r_k| \leq \frac{\varepsilon}{2(d+1)c^k}$ όπου $c = \max\{|a|, |b|\}$. Θέτουμε $q(x) = \sum_{k=0}^d r_k x^k$ και έχουμε

$$\|f - q\|_{[a,b]} \leq \|f - p\|_{[a,b]} + \|p - q\|_{[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sum_{k=0}^d |a_k - r_k| c^d \leq \varepsilon.$$

Τα πολυώνυμα δεν μπορούν να έχουν πάντα ακέραιους συντελεστές. Για παράδειγμα εάν $f = \frac{1}{2}$, τότε $\|f - p\|_{[0,1]} \geq |\frac{1}{2} - p(0)| \geq \frac{1}{2}$ για κάθε πολυώνυμο p με ακέραιους συντελεστές.

(7)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
