

(1) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $(0, +\infty)$. Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$; Είναι η συνάρτηση που ορίζεται συνεχώς στο $(0, +\infty)$; Παραγωγίσιμη; Φραγμένη;

(2) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ σε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

(3) Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}.$$

(4) Έστω $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $a > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 0$.

(5) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $(1, +\infty)$ σε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Υπολογίστε την παράγωγο της f καθώς και τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(6) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την συνάρτηση (δείξτε ότι η παρακάτω σειρά συγκλίνει απόλυτα)

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση F είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο 1.

(Ορίζουμε $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n f(x+k)$.)

(7)* Δείξτε ότι αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$.