

(1) Θέτουμε  $y = x^3$  και βρίσκουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2 2^n}$  είναι το  $[-2, 2]$ . Επομένως το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^2 2^n}$  είναι το  $[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ .

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για  $|x| < 1$  και αποκλίνει για  $|x| > 1$ . Για  $x = \pm 1$  είναι προφανές ότι η σειρά δεν συγκλίνει. Επομένως το διάστημα σύγκλισης είναι το  $(-1, 1)$ .

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για  $|x| < 1$  και αποκλίνει για  $|x| > 1$ . Για  $x = \pm 1$  είναι προφανές ότι η σειρά συγκλίνει. Επομένως το διάστημα σύγκλισης είναι το  $[-1, 1]$ .

(2) (i) Αρχικά δείξτε ότι και οι δύο σειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης  $+\infty$ . Επομένως οι παράγωγοι των  $f, g$  προκύπτουν παραγωγίζοντας τις σειρές όρο προς όρο και οι ζητούμενες σχέσεις προκύπτουν άμεσα.

(ii) Θέτουμε  $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας το (i) παίρνουμε ότι

$$h' = 2ff' + 2gg' = -2fg + 2fg = 0.$$

Επίσης έχουμε  $h(0) = 1$ . Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι  $h(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(3) Η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Για  $x \in (-1, 1)$  θέτουμε  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ . Από γνωστό θεώρημα έχουμε για  $x \in (-1, 1)$  ότι

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Επίσης έχουμε  $f(0) = 0$ . Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dx = \arctan x$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ .

(4) Αρχικά παρατηρούμε ότι  $f(x) = \log(1+x+x^2) = \log(\frac{1-x^3}{1-x}) = \log(1-x^3) - \log(1-x)$ . Για  $x \in (-1, 1)$  γνωρίζουμε ότι  $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . Επομένως για  $x \in (-1, 1)$  έχουμε

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

όπου  $a_n = -\frac{2}{n}$  όταν το  $n$  είναι πολλαπλάσιο του 3 και  $a_n = \frac{1}{n}$  αλλιώς.

Αφού  $f^{(n)}(0) = n!a_n$ , έχουμε  $f(0) = 0$  και  $f^{(n)}(0) = -2(n-1)!$  όταν το  $n$  είναι θετικό πολλαπλάσιο του 3 και  $f^{(n)}(0) = (n-1)!$  αλλιώς.

---

(5) Η συνάρτηση  $f(x) = \sin(2\pi x)$  έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά στο  $\mathbb{R}$  και ικανοποιεί  $f(n) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Η συνάρτηση  $g(x) = \sin(2\pi x^2)$  ικανοποιεί  $g(\sqrt{n}) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Η  $g$  έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά στο  $\mathbb{R}$  διότι από το ανάπτυγμα *Taylor* της  $\sin x$  προκύπτει ότι

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n+1} x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

---

(6) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε  $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

(i) Από συνέχεια έχουμε ότι  $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ . Το ότι  $f'(0) = 0$  προκύπτει εφαρμόζοντας το θεώρημα *Rolle* στα διαστήματα  $[0, \frac{1}{n}]$  παίρνουμε ότι υπάρχουν  $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$  ώστε  $f'(\xi_n) = 0$ . Αφού  $\xi_n \rightarrow 0$  από συνέχεια της  $f$  στο 0 παίρνουμε ότι  $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(\xi_n) = 0$ .

Παρόμοια, δείξτε επαγωγικά ότι για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  υπάρχει ακολουθία  $(\xi_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$  ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{k,n} = 0$  και  $f^{(k)}(\xi_{k,n}) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Προφανώς τότε  $f^{(k)}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(\xi_{k,n}) = 0$ .

(ii) Από την υπόθεσή μας παίρνουμε ότι για κάθε  $a > 0$  έχουμε ότι

$$R_n = \sup_{x, \xi \in [-a, a]} \frac{|f^{(n)}(\xi) x^n|}{n!} \leq \frac{2^n a^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Αρα το θεώρημα *Taylor* εφαρμόζεται και παίρνουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ . Αφού  $f^{(n)}(0) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , προκύπτει ότι  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

---

(7)\* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.

---