
9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2025

(1) Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια και τη διακριτή μετρική, και αν δεν είναι βρείτε την κλειστότητά τους.

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2025} + y^{2025} \leq 1\}$

(ii) $B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : m, n \in \mathbb{N}\}.$

(2) Για καθένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$, με τη συνηθισμένη μετρική, εξετάστε αν είναι ανοιχτά, κλειστά, και βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, και το σύνορό τους.

(i) $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1].$

(ii) $B = [0, 1] \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}.$

(iii) $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + \frac{1}{n}].$

(3) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η κλειστότητα $\overline{A}$ ενός υποσυνόλου A του X είναι κλειστό σύνολο. Συμπεράνετε ότι για κάθε $A \subset X$ ισχύει $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

(4) Στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε $d(m, n) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$, $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι η d είναι μετρική.

(ii) Περιγράψτε όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες και τα κλειστά σύνολα στον $(\mathbb{N}, d)$.

(5) Δύο μετρικές d, d' σε χώρο X λέγονται ισοδύναμες εάν υπάρχουν θετικές σταθερές C_1, C_2 ώστε

$$C_1 d'(x, y) \leq d(x, y) \leq C_2 d'(x, y), \quad x, y \in X.$$

(i) Εάν οι μετρικές d, d' στον χώρο X είναι ισοδύναμες, δείξτε ότι οι μετρικοί χώροι (X, d) και (X, d') έχουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες και τα ίδια κλειστά σύνολα.

(ii) Δείξτε ότι στον $\mathbb{R}^d$ οι μετρικές d_p , $p \in [1, +\infty]$, που έχουμε ορίσει στο μάθημα, είναι όλες ισοδύναμες.

(6)* Δείξτε ότι κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών (με τη συνηθισμένη μετρική) έχει σημείο συσσώρευσης το οποίο είναι στοιχείο του συνόλου.
