

(1) (i) Θα δείξουμε ότι το σύνολο A είναι κλειστό με την Ευκλείδεια μετρική. Έστω $(x_n, y_n) \in A$, $n \in \mathbb{N}$, και $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, τότε $x_n \rightarrow x_0$ και $y_n \rightarrow y_0$. Αφού $x_n^{2025} + y_n^{2025} \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνοντας όρια έχουμε $x_0^{2025} + y_0^{2025} \leq 1$. Επομένως, $(x_0, y_0) \in A$.

Με την διακριτή μετρική όλα τα σύνολα είναι κλειστά, επομένως και το A .

(ii) Αρχικά βρίσκουμε την κλειστότητα του B με την Ευκλείδεια μετρική. Έστω $(x_n, y_n) \in B$, $n \in \mathbb{N}$, και $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, τότε $x_n \rightarrow x_0$ και $y_n \rightarrow y_0$. Τα x_n, y_n παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $x_0, y_0 \in C = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Επομένως $\bar{B} \subset C \times C$. Επίσης εύκολα δείχνουμε ότι κάθε στοιχείο του $C \times C$ είναι οριακό σημείο του B . Αρα $\bar{B} = C \times C$.

Με τη διακριτή μετρική τα μόνα οριακά σημεία ενός συνόλου είναι στοιχεία του συνόλου. Επομένως $\bar{B} = B$.

(2) (i) Δείξτε ότι $\bar{A} = [0, 1]$, $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = [0, 1]$, το A δεν είναι κλειστό ούτε ανοιχτό.

(ii) Δείξτε ότι $\bar{B} = [0, 1]$, $B^\circ = B$, $\partial B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, το B είναι ανοιχτό όχι όμως κλειστό.

(iii) Δείξτε ότι $\bar{C} = C$, $C^\circ = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n + \frac{1}{n}) \cup \{2\}$, $\partial C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n, n + \frac{1}{n}\} \setminus \{2\}$, το C είναι κλειστό όχι όμως ανοιχτό.

(3) Έστω $x_n \in \bar{A}$, $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \rightarrow x_0$. Αφού το x_n είναι οριακό σημείο του A υπάρχει $y_n \in A$ ώστε $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Τότε $d(y_n, x_0) \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, x_0) \rightarrow 0$, επομένως $y_n \xrightarrow{d} x_0$. Συμπεραίνουμε ότι το x_0 είναι οριακό σημείο του A , άρα $x_0 \in \bar{A}$.

Αφού το $\bar{A}$ περιέχει όλα τα οριακά του σημεία ταυτίζεται με την κλειστότητά του, δηλαδή $(\bar{A}) = \bar{A}$.

(4) (i) Εύκολα δείχνουμε ότι η d είναι μετρική.

(ii) Έστω $x_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, k) \rightarrow 0$. Τότε $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{k}| \rightarrow 0$. Επομένως, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{k}$, ή ισοδύναμα, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k$. Από αυτό προκύπτει εύκολα ότι $x_n = k$ τελικά. Άρα οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες ως προς την μετρική d είναι οι τελικά σταθέρες. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ είναι κλειστά ως προς την μετρική d .

(5) (i) Έστω $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Από τις δοσμένες ανισότητες προκύπτει ότι $d(x_n, x) \rightarrow 0$ αν και μόνο αν $d'(x_n, x) \rightarrow 0$. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από αυτό.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p \in [1, +\infty)$ η μετρική d_p είναι ισοδύναμη με την d_∞ . Αρχικά παρατηρήστε ότι για $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα

$$\max_{k=1, \dots, d} |a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^d |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq d^{\frac{1}{p}} \max_{k=1, \dots, d} |a_k|.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq d^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$. Επομένως οι μετρικές d_p και d_∞ είναι ισοδύναμες.

(5)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
