

Πρόοδος 2025

Διάρκεια 2 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2.5 μονάδες) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

στα διαστήματα $(0, 1)$ και $[1, +\infty)$.

(2) (2.5 μονάδες) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη και συνεχής στο 0 με $f(0) = 0$, και $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}, \quad x \in (0, 1],$$

και $g(0) \neq 0$.

(i) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

(ii) Είναι η g ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$;

(iii) Είναι η g Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$;

(3) (3 μονάδες) (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση Dirichlet $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(ii) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $0 \leq f(x) \leq D(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Υπολογίστε (με αιτιολόγηση) το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \cos(f(x)) dx,$$

αφού πρώτα αιτιολογήσετε γιατί η $\cos(f)$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(4) (3 μονάδες) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για $x > 0$, που ικανοποιούν

$$\int_0^x (f(t))^k dt = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^k$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$, εάν $k = 2$ και εάν $k = 2025$. (Δύο ερωτήματα.)

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.