Θεωρία Μετρικών Χώρων

Θέμης Μήτσης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιο Κρητης

Ηρακλειο

Περιεχόμενα

Μετρικοί χώροι

Ορισμός. *Ένας μετρικός χώρος είναι ένα ζευγάρι* (X, d), *όπου* X *ένα σύνολο και* d *μια συνάρτηση (η μετρική)* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *τέτοια ώστε για κάθε* $x, y, z \in X$ *έχουμε*

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(2) $d(x, y) = d(y, x)$.
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Παραδείγματα.

(1) Έστω X ένα σύνολο. Ορίζουμε $d : X \times X \to [0, +\infty)$ με

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}.$$

Τότε η d είναι μια μετρική (η *διακριτή μετρική*). Αυτή είναι η πιο «χονδροειδής» απόσταση που μπορεί να ορίσει κανείς: δυο οποιαδήποτε διακεκριμένα σημεία έχουν απόσταση 1. Επαληθεύουμε την τριγωνική ανισότητα. Αν $x = y$ τότε $d(x, y) = 0 \leq d(x, z) + d(z, y)$. Αν $x \neq y$ τότε δεν μπορεί $d(x, z) = d(y, z) = 0$ γιατί θα είχαμε $x = y = z$. Επομένως κάποιο από τα $d(x, z)$, $d(z, y)$ είναι ίσο με 1, από το οποίο συνεπάγεται ότι $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(2) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ θέτουμε $d(x, y) = |x - y|$. Τότε η d είναι μια μετρική (η *συνηθισμένη μετρική* στο $\mathbb{R}$).

(3) Για κάθε $x = (x(1), x(2), \ldots, x(N))$, $y = (y(1), y(2), \ldots, y(N)) \in \mathbb{R}^N$ ορίζουμε

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k) - y(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Τότε η d_2 είναι η *συνηθισμένη μετρική* στον $\mathbb{R}^N$, δηλαδή η Ευκλείδεια απόσταση. Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια τής ανισότητας Minkowski:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2 \right)^{1/2},$$

η οποία με τη σειρά της προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2 \right)^{1/2}.$$

(4) Για κάθε $x = (x(1), x(2), \ldots, x(N))$, $y = (y(1), y(2), \ldots, y(N)) \in \mathbb{R}^N$ ορίζουμε

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{N} |x(k) - y(k)|, \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq N} |x(k) - y(k)|.$$

Τότε οι d_1 και d_∞ είναι μετρικές στον $\mathbb{R}^N$.

(5) Θέτουμε $C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$ (το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$), και για κάθε $f, g \in C([a, b])$ έστω

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

και

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f - g|.$$

Τότε οι d_∞ και d_1 είναι μετρικές (χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με το προηγούμενο παράδειγμα για να τονίσουμε την αναλογία. Παρατηρήστε ότι το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα). Προσέξτε ότι για να δείξουμε ότι η d_1 είναι μετρική πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι αν το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης είναι μηδέν, τότε η συνάρτηση είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

Ορισμός. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε*

$$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}\,.$$

Το σύνολο $D(x, \varepsilon)$ ονομάζεται (ανοιχτός) δίσκος με κέντρο x και ακτίνα ε ή ε-περιοχή τού x.

Παραδείγματα.

(1) Στον $C([a, b])$ με την μετρική d_∞, η ε-περιοχή μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων η γραφική παράσταση των οποίων βρίσκεται σε μια ανοιχτή λωρίδα πλάτους 2ε γύρω από τη γραφική παράσταση τής f.

(2) Στο $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη μετρική, η ε-περιοχή ενός σημείου x είναι όλα τα σημεία τα αποία απέχουν από το x Ευκλείδεια απόσταση μικρότερη από ε. Είναι επομένως ένας ανοιχτός δίσκος (με τη συνηθισμένη έννοια) κέντρου x και ακτίνας ε.

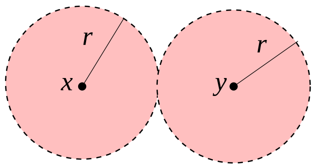
(3) Στο $\mathbb{R}^2$ με τη μετρική d_∞, η ε-περιοχή ενός σημείου x είναι ένα ανοιχτό τετράγωνο με κέντρο x και μήκος πλευράς 2ε.

(4) Σ' ένα χώρο με τη διακριτή μετρική, ο δίσκος με κέντρο κάποιο σημείο και ακτίνα 0.9999 είναι το ίδιο το σημείο. Ένας δίσκος με ακτίνα 1.0001 είναι ολόκληρος ο χώρος.

Παρατήρηση. Αν ο (X, d) είναι κάποιος μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε οι δίσκοι $D(x, r)$, $D(y, r)$ με $r = d(x, y)/2$ είναι ξένοι γιατί αν υπήρχε $z \in D(x, r) \cap D(y, r)$, τότε θα είχαμε

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2r = d(x, y),$$

άτοπο.



Ορισμός. *Ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου ονομάζεται φραγμένο αν περιέχεται σε κάποιον ανοιχτό δίσκο.*

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, τα φραγμένα σύνολα είναι αυτά ακριβώς τα οποία είναι φραγμένα με τη συνηθισμένη έννοια. Πράγματι, το A είναι φραγμένο με τη συνηθισμένη έννοια αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x| < M$ για κάθε $x \in A$. Αλλά αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $A \subset (-M, M) = D(0, M)$.

(2) Στο $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική, όλα τα σύνολα είναι φραγμένα, διότι το ίδιο το $\mathbb{R}$ είναι ο ανοιχτός δίσκος $D(0, 2)$.

(3) Στο $\mathbb{R}^N$ ένα σύνολο είναι φραγμένο ως προς την d_2 αν και μόνο αν είναι φραγμένο ως προς την d_∞. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{N} d_\infty$. Έτσι αν το A βρίσκεται σε κάποιον δίσκο ακτίνας r ως προς την d_∞ τότε βρίσκεται στον δίσκο με το ίδιο κέντρο και ακτίνα $\sqrt{N} r$ ως προς την d_2. Αντίστροφα, αν το A βρίσκεται σε κάποιον δίσκο ακτίνας r ως προς την d_2 τότε βρίσκεται στον δίσκο με το ίδιο κέντρο και την ίδια ακτίνα ως προς την d_∞.

Σύγκλιση ακολουθιών

Ορισμός. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, x_n μια ακολουθία στο X και $x \in X$. Λέμε ότι η x_n συγκλίνει στο x και γράφουμε $x_n \to x$ ή $\lim x_n = x$ ή $x_n \xrightarrow{d} x$ (αν θέλουμε να τονίσουμε τη μετρική), αν $d(x_n, x) \to 0$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε n με $n \geq n_0$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in D(x, \varepsilon)$ για κάθε n με $n \geq n_0$.*

Θεώρημα (Μοναδικότητα τού ορίου)**.** *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, x_n μια ακολουθία στο X και $x, y \in X$. Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y$, τότε $x = y$.*

Απόδειξη. Έχουμε $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Άρα $d(x, y) = 0$, επομένως $x = y$. □

Παραδείγματα.

(1) Στον $\mathbb{R}^N$ με τη συνηθισμένη μετρική, $x_n \to x$ αν και μόνο αν
$$\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$$
για κάθε $k = 1, 2, \ldots, N$ (δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη). Πράγματι, αν $x_n \xrightarrow{d_2} x$ τότε για κάθε k έχουμε $|x_n(k) - x(k)| \leq d_2(x_n, x) \to 0$. Αντίστροφα, αν $x_n(k) \to x(k)$ για κάθε k, τότε
$$d_2(x_n, x) = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^2 \right)^{1/2} \to 0.$$
Το ίδιο ισχύει και για τη μετρική d_∞ γιατί η ανισότητα $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{N} d_\infty$ μας λέει ότι μια ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο x ως προς τη μια μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την άλλη.

(2) Στον $C([a, b])$ με τη μετρική d_∞ έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{d_\infty} f$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

(3) Σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο, μια ακολουθία η οποία είναι τελικά ίση με x, συγκλίνει στο x (τελικά ίση με x σημαίνει ότι από κάποιο δείκτη και μετά όλοι οι όροι της είναι ίσοι με x).

(4) Σε ένα σύνολο με τη διακριτή μετρική ισχύει και το αντίστροφο. Αν $x_n \to x$ τότε η x_n είναι τελικά ίση με x. Πράγματι, σ' ένα σύνολο με τη διακριτή μετρική το $\{x\}$ είναι ανοιχτός δίσκος με κέντρο x (και ακτίνα, ας πούμε, $1/2$), επομένως, από τον ορισμό τής σύγκλισης, υπάρχει κάποιο n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in \{x\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$.

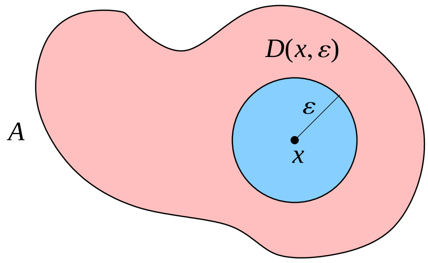
Παρατηρήσεις. Ακριβώς όπως στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι:

(1) Σ' ένα μετρικό χώρο κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

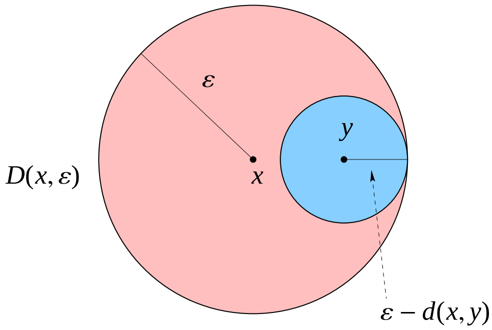
(2) Μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο x.

Ανοιχτά και κλειστά σύνολα

Ορισμός. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A λέγεται ανοιχτό, αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subset A$. Το A λέγεται κλειστό αν το $X \setminus A$ είναι ανοιχτό.*



(α΄)



(β΄)

Θεώρημα. *Κάθε ανοιχτός δίσκος σ΄ένα μετρικό χώρο (X, d) είναι ανοιχτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $D(x, \varepsilon)$ ένας ανοιχτός δίσκος. Τότε για κάθε $y \in D(x, \varepsilon)$ έχουμε $D(y, \varepsilon - d(x, y)) \subset D(x, \varepsilon)$. □

Παρατηρήσεις.

(1) Με κέντρο κάθε σημείο ενός ανοιχτού συνόλου, υπάρχει δίσκος ο οποίος περιέχεται στο σύνολο. Επομένως το σύνολο είναι η ένωση όλων αυτών των δίσκων. Δηλαδή, οι δίσκοι είναι οι «θεμέλιοι λίθοι» των ανοιχτών συνόλων.
(2) Μια ακολουθία x_n συγκλίνει σε κάποιο x αν και μόνο αν για κάθε A ανοιχτό με $x \in A$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in A$ για κάθε $n \geq n_0$.

Θεώρημα. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος.*

(1) *Αν τα G_i, $i \in I$, είναι ανοιχτά, τότε το $\bigcup_{i \in I} G_i$ είναι ανοιχτό.*
(2) *Αν τα $G_1, \ldots, G_n$ είναι ανοιχτά, τότε το $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ είναι ανοιχτό.*

Απόδειξη.

(1) Έστω $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$. Τότε $x \in G_{i_0}$ για κάποιο i_0, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subset G_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$.
(2) Έστω $x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. Τότε $x \in G_k$ για κάθε k. Άρα υπάρχουν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε $D(x, \varepsilon_k) \subset G_k$ για κάθε k. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Τότε $D(x, \varepsilon) \subset G_k$ για κάθε k. Επομένως $D(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k$.

□

Θεώρημα. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος.*

(1) *Αν F_i, $i \in I$, κλειστά τότε $\bigcap_{i \in I} F_i$ κλειστό.*
(2) *Αν $F_1, \ldots, F_n$ κλειστά τότε $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ κλειστό.*

Απόδειξη.

(1) F_i, $i \in I$, κλειστά $\Rightarrow X \setminus F_i$, $i \in I$, ανοιχτά $\Rightarrow \bigcup_{i \in I}(X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$ ανοιχτό $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i$ κλειστό.
(2) Παρόμοια.

□

Θεώρημα. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \to x$ έχουμε $x \in A$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A είναι κλειστό και $x_n \in A$ μια ακολουθία με $x_n \to x$. Ας υποθέσουμε ότι $x \notin A$. Τότε $x \in X \setminus A$. Αλλά το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x,\varepsilon) \subset X \setminus A$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_{n_0} \in D(x,\varepsilon)$. Επομένως $x_{n_0} \in X \setminus A$, δηλαδή $x_{n_0} \notin A$, άτοπο. Αντίστροφα, έστω ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σημείων τού A συγκλίνει σε κάποιο σημείο τού A. Υποθέτουμε ότι το A δεν είναι κλειστό. Τότε το $X \setminus A$ δεν είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $x \in X \setminus A$ τέτοιο ώστε $D(x,\varepsilon) \not\subset X \setminus A$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Δηλαδή $D(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε ε. Ιδιαίτερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in D(x,1/n) \cap A$. Αλλά τότε $d(x_n,x) < 1/n \to 0$, άρα η x_n συγκλίνει στο x. Αυτό είναι άτοπο γιατί το x δεν ανήκει στο A ενώ η ακολουθία ανήκει. □

Παραδείγματα.

(1) Σε κάθε μετρικό χώρο (X,d), τα μονοσύνολα είναι κλειστά. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $y \in X \setminus \{x\}$. Τότε $x \neq y$. Θέτουμε $r = d(x,y) > 0$ και παίρνουμε ότι $x \notin D(y,r)$, άρα $\{x\} \cap D(y,r) = \emptyset$, επομένως $D(y,r) \subset X \setminus \{x\}$. Δηλαδή το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτό, επομένως το $\{x\}$ είναι κλειστό.

(2) Σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε πεπερασμένο σύνολο $F = \{x_1,\dots,x_n\}$ είναι κλειστό γιατί $F = \bigcup_{k=1}^{n}\{x_k\}$ και τα μονοσύνολα δείξαμε ότι είναι κλειστά.

(3) Σε κάθε διακριτό χώρο X, κάθε σύνολο $A \subset X$ είναι ανοιχτό γιατί για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $D(x,1/2) = \{x\} \subset A$. Συμπεραίνουμε ότι κάθε σύνολο είναι επίσης κλειστό, αφού το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.

(4) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, το $(0,2)$ είναι ανοιχτό γιατί $(0,2) = D(1,1)$. Το $(0,2)$ δεν είναι κλειστό γιατί η ακολουθία $1/n \in (0,2)$ συγκλίνει στο $0 \notin (0,2)$.

(5) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, το $[0,2]$ είναι κλειστό γιατί αν μια ακολουθία αριθμών μεταξύ τού 0 και τού 2 συγκλίνει τότε το όριό της είναι μεταξύ τού 0 και τού 2. Το $[0,2]$ δεν είναι ανοιχτό γιατί κάθε περιοχή τού 0 περιέχει αρνητικούς αριθμούς, επομένως δεν υπάρχει περιοχή τού 0 η οποία να περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο $[0,2]$.

(6) Γενικότερα, κάθε ανοιχτό διάστημα (a,b) είναι ανοιχτό σύνολο και όχι κλειστό. Κάθε κλειστό διάστημα είναι κλειστό σύνολο και όχι ανοιχτό.

(7) Το $(0,+\infty)$ είναι ανοιχτό διότι $(0,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(0,n)$ (ένωση ανοιχτών συνόλων).

(8) Ένα ημιάνοιχτο διάστημα δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό σύνολο.

(9) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτό γιατί δεν περιέχει διάστημα. Δεν είναι κλειστό γιατί το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα.

(10) Το σύνολο $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό γιατί η ακολουθία $1/n \in A$ συγκλίνει στο $0 \notin A$. Το A δεν είναι ανοιχτό γιατί δεν περιέχει διάστημα.

(11) Το σύνολο $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ είναι κλειστό γιατί το συμπλήρωμά του

$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty,0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right) \cup (1,+\infty)$$

είναι ανοιχτό σαν ένωση ανοιχτών συνόλων. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το A δεν είναι ανοιχό.

(12) Το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό γιατί

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1).$$

Παρατήρηση. Η άπειρη τομή ανοιχτών συνόλων δεν είναι κατ' ανάγκη ανοιχτό σύνολο, για παράδειγμα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n,1/n) = \{0\}.$$

Άρα, η άπειρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό σύνολο.

Θεώρημα. *Έστω $G \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό (ως προς τη συνηθισμένη μετρική). Τότε το G είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in G$ έστω I_x η ένωση όλων των ανοιχτών διαστημάτων που περιέχουν το x και περιέχονται στο G (τέτοια διαστήματα υπάρχουν διότι το G είναι ανοιχτό). Τα σύνολα I_x είναι ανοιχτά διαστήματα (ενδεχομένως μη φραγμένα) και προφανώς $G = \bigcup_{x\in G} I_x$. Επίσης, για κάθε $x,y \in G$ με $x \neq y$ έχουμε ότι είτε $I_x = I_y$, είτε

$I_x \cap I_y = \emptyset$. Επομένως αν θέσουμε $\mathscr{I} = \{I_x : x \in G\}$, τότε η οικογένεια $\mathscr{I}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο ανοιχτά διαστήματα και $G = \bigcup_{I \in \mathscr{I}} I$. Μένει να δείξουμε ότι η $\mathscr{I}$ είναι αριθμήσιμη. Πράγματι, κάθε $I \in \mathscr{I}$ περιέχει κάποιο ρητό q_I. Αφού η $\mathscr{I}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο διαστήματα, η συνάρτηση $\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}$ με $\varphi(I) = q_I$ είναι 1-1. Αλλά το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, άρα και η $\mathscr{I}$ είναι αριθμήσιμη. $\square$

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα δεν ισχύει σε ανώτερες διαστάσεις. Στο $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, δεν είναι αλήθεια ότι κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών δίσκων. Η κρίσιμη γεωμετρική ιδιότητα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη ήταν ότι η ένωση δύο τεμνόμενων ανοιχτών διαστημάτων είναι διάστημα. Στο επίπεδο, για παράδειγμα, η ένωση δύο τεμνόμενων δίσκων δεν είναι δίσκος, εκτός αν ο ένας περιέχεται στον άλλο.

Συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός. *Έστω (X, d), (Y, ρ) δυο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση.*

(1) *Η f λέγεται συνεχής σε κάποιο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$ έχουμε $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο.*

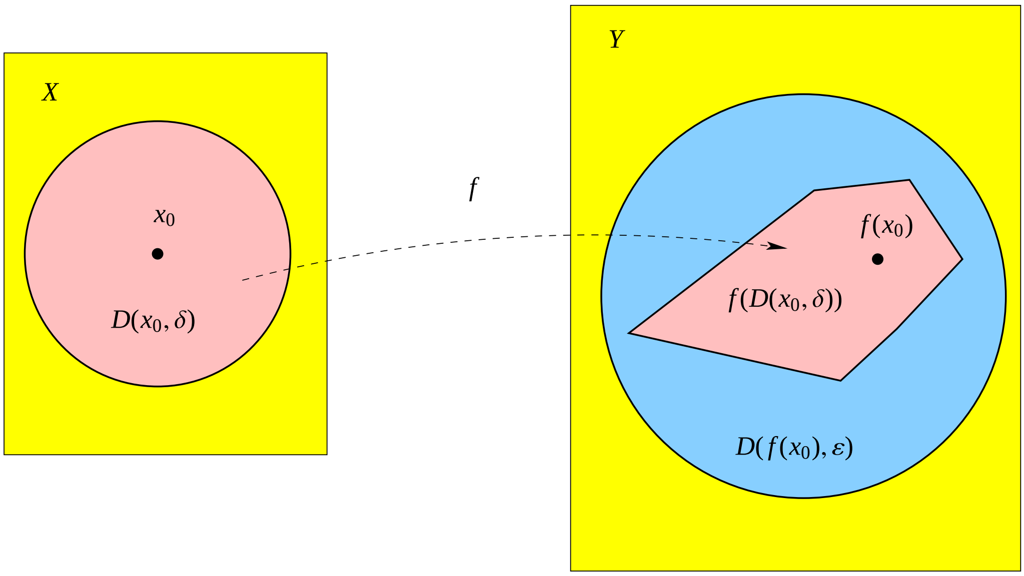
(2) *Η f λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ έχουμε $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Παρατηρήσεις.

(1) Στην περίπτωση όπου $X = Y = \mathbb{R}$ με την συνηθισμένη μετρική, οι προηγούμενοι ορισμοί συμπίπτουν με τους γνωστούς από την Ανάλυση ορισμούς τής συνέχειας και τής ομοιόμορφης συνέχειας.

(2) Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(D(x_0, \delta)) \subset D(f(x_0), \varepsilon).$$



(3) Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_n \in X$ με $x_n \to x_0$ έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

(4) Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς, τότε το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο των f και g είναι συνεχείς.

(5) Αν X, Y, Z είναι μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ συνεχείς τότε η σύνθεση $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής.

Θεώρημα. *Έστω X, Y μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι συνεχής.*

(2) *Για κάθε $A \subset Y$ κλειστό, το $f^{-1}(A)$ είναι κλειστό.*

(3) *Για κάθε $A \subset Y$ ανοιχτό, το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό.*

Απόδειξη.

(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω $x_n \in f^{-1}(A)$ με $x_n \to x$. Τότε $f(x_n) \in A$ και $f(x_n) \to f(x)$ αφού η f είναι συνεχής. Αλλά το A είναι κλειστό, άρα $f(x) \in A$, συνεπώς $x \in f^{-1}(A)$. Επομένως το $f^{-1}(A)$ είναι κλειστό.

(2) $\Rightarrow$ (3) Έστω $A \subset Y$ ανοιχτό. Τότε το $Y \setminus A$ είναι κλειστό, άρα το $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ είναι κλειστό, επομένως το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό.

(3) $\Rightarrow$ (1) Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$ τυχόντα. Τότε το $f^{-1}(D(f(x_0), \varepsilon))$ είναι ανοιχτό και $x_0 \in f^{-1}(D(f(x_0), \varepsilon))$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_0, \delta) \subset f^{-1}(D(f(x_0), \varepsilon))$. Αυτό σημαίνει ότι $f(D(x_0, \delta)) \subset D(f(x_0), \varepsilon)$, άρα η f είναι συνεχής.

$\square$

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση **αντιστρέφει** ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά σύνολα και κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα. Δεν είναι αλήθεια ότι μια συνεχής συνάρτηση **στέλνει** ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά σύνολα και κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \arctan x$, τότε $f((-10, 10)) = [-1, 1]$ και $g(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$.

Παραδείγματα.

(1) Αν ο X είναι διακριτός χώρος και ο Y τυχόντας μετρικός χώρος τότε κάθε $f : X \to Y$ είναι συνεχής αφού κάθε υποσύνολο τού X είναι ανοιχτό, άρα και το $f^{-1}(A)$ για κάθε ανοιχτό $A \subset Y$.

(2) Ο κύκλος $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι κλειστό σύνολο γιατί $C = f^{-1}(\{1\})$, όπου $f(x, y) = x^2 + y^2$ συνεχής.

Κλειστότητα, σημεία συσσώρευσης, εσωτερικό και σύνορο

Ορισμός. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$\overline{A} = \{x \in X : \text{Υπάρχει ακολουθία } x_n \in A \text{ τέτοια ώστε } x_n \to x\}.$$

Το $\overline{A}$ ονομάζεται κλειστότητα τού A και τα σημεία του οριακά σημεία τού A.

Διαισθητικά, η κλειστότητα ενός συνόλου αποτελείται από όλα τα σημεία που απέχουν «μηδενική απόσταση» από το σύνολο.

Παρατήρηση. Κάθε σημείο x τού A είναι προφανώς το όριο τής σταθερής ακολουθίας $x_n = x$, άρα κάθε σημείο τού A είναι οριακό σημείο τού A. Δηλαδή, $A \subset \overline{A}$.

Θεώρημα. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$.*

(1) *Ένα σημείο x ανήκει στο $\overline{A}$ αν και μόνο αν κάθε περιοχή τού σημείου τέμνει το A.*
(2) *Το $\overline{A}$ είναι κλειστό.*
(3) *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$.*

Απόδειξη.

(1) Έστω ότι $x \in \overline{A}$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό τού $\overline{A}$, υπάρχει $x_n \in A$ με $x_n \to x$. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_{n_0} \in D(x, \varepsilon)$. Αντίστροφα, αν κάθε περιοχή τού x τέμνει το A, τότε για κάθε n μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in A \cap D(x, 1/n)$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $d(x_n, x) < 1/n \to 0$, άρα $x_n \to x$, συνεπώς $x \in \overline{A}$.
(2) Αρκεί να δείξουμε ότι αν x_n είναι μια ακολουθία σημείων τού $\overline{A}$ με $x_n \to x$, τότε $x \in \overline{A}$. Αφού $x_1 \in \overline{A}$, το x_1 είναι όριο κάποιας ακολουθίας σημείων τού A, άρα υπάρχει $y_1 \in A$ τέτοιο ώστε $d(x_1, y_1) < 1$. Ομοίως, αφού το x_2 είναι όριο ακολουθίας σημείων τού A, υπάρχει $y_2 \in A$ τέτοιο ώστε $d(x_2, y_2) < 1/2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία $y_n \in A$ τέτοια ώστε $d(x_n, y_n) < 1/n$. Αλλά τότε $d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) < 1/n + d(x_n, x) \to 0$. Δηλαδή $y_n \to x$, άρα $x \in \overline{A}$.
(3) Έστω ότι το A είναι κλειστό και $x \in \overline{A}$. Τότε υπάρχει $x_n \in A$ με $x_n \to x$. Αφού το A είναι κλειστό έχουμε ότι $x \in A$. Δηλαδή $\overline{A} \subset A$, άρα $A = \overline{A}$, γιατί η σχέση $A \subset \overline{A}$ ισχύει πάντα. Αντίστροφα, αν $A = \overline{A}$, τότε το A είναι κλειστό από το (1).

□

Παρατήρηση. Η κλειστότητα τού A είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο τού A. Πράγματι αν $F \subset X$ κλειστό με $F \supset A$ και $x \in \overline{A}$, τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \to x$. Αλλά $x_n \in F$ αφού το A είναι υποσύνολο τού F. Συνεπώς $x \in F$ διότι το F είναι κλειστό.

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική

$$\overline{(0,1)} = \overline{(0,1]} = \overline{[0,1)} = \overline{[0,1]} = [0,1], \quad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \overline{\{1/n : n \in \mathbb{N}\}} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

(2) Στο $\mathbb{R}^N$ με τη συνηθισμένη μετρική, $\overline{D(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^N : d_2(x,y) \leq r\}$. Δηλαδή η κλειστότητα τού ανοιχτού δίσκου είναι ο κλειστός δίσκος. Αυτό δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα, σ' ένα διακριτό χώρο με περισσότερα από ένα σημεία, έχουμε

$$\overline{D(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} \neq X = \{y \in X : d(x,y) \leq 1\}.$$

Ορισμός. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$A' = \{x \in X : \textit{Για κάθε } \varepsilon > 0 \textit{ σύνολο } D(x,\varepsilon) \cap A \textit{ είναι άπειρο}\}.$$

Το A' ονομάζεται παράγωγο σύνολο τού A και τα σημεία του σημεία συσσώρευσης τού A.

Παρατήρηση. Κάθε σημείο συσσώρευσης είναι προφανώς οριακό σημείο.

Θεώρημα. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$.*

(1) *Το A' είναι κλειστό.*
(2) $\overline{A} = A \cup A'$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $x_n \in A'$ με $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης τού A. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_{n_0} \in D(x,\varepsilon)$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_{n_0}, r) \subset D(x,\varepsilon)$. Αλλά το x_{n_0} είναι σημείο συσσώρευσης τού A, άρα το $D(x_{n_0}, r) \cap A$ είναι άπειρο, συνεπώς και το $D(x,\varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο.
(2) Προφανώς $A \cup A' \subset \overline{A}$. Ας υποθέσουμε ότι $A \cup A' \subsetneq \overline{A}$. Τότε υπάρχει ένα οριακό σημείο x το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης και δεν ανήκει στο A. Άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $D(x,r) \cap A$ είναι πεπερασμένο. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{d(x,y) : y \in D(x,r) \cap A\} > 0$. Τότε $D(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, άτοπο.

□

Παραδείγματα.

(1) Σε κάθε μετρικό χώρο, ένα πεπερασμένο σύνολο δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
(2) Σ' ένα διακριτό χώρο, κανένα σύνολο δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
(3) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική

$$(0,1)' = (0,1]' = [0,1)' = [0,1]' = ((0,1) \cup \{3\})' = [0,1], \quad \mathbb{Z}' = \emptyset, \quad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}, \quad \{1/n : n \in \mathbb{N}\}' = \{0\}.$$

Ορισμός. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$A^\circ = \{x \in A : \textit{Υπάρχει } \varepsilon > 0 \textit{ τέτοιο ώστε } D(x,\varepsilon) \subset A\}.$$

Το A° ονομάζεται εσωτερικό τού A και τα σημεία του εσωτερικά σημεία τού A.

Παρατηρήσεις.

(1) Το A° είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο τού A.
(2) Ένα σύνολο είναι ανοιχτό αν και μόνο αν είναι ίσο με το εσωτερικό του.

Παραδείγματα. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική

$$(0,1)^\circ = (0,1]^\circ = [0,1)^\circ = [0,1]^\circ = ((0,1) \cup \{3\})^\circ = (0,1), \quad \mathbb{Z}^\circ = \emptyset, \quad \mathbb{Q}^\circ = \emptyset, \quad \{1/n : n \in \mathbb{N}\}^\circ = \emptyset.$$

Ορισμός. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Το ∂A ονομάζεται σύνορο τού A και τα σημεία του συνοριακά σημεία τού A.

Παραδείγματα.

(1) Σ' ένα διακριτό χώρο, το σύνορο οποιουδήποτε συνόλου είναι κενό.
(2) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική

$$\partial(0,1) = \partial(0,1] = \partial[0,1) = \partial[0,1] = \{0,1\}, \quad \partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \quad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

(3) Στο $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη μετρική, το συνόρο ενός δίσκου είναι η περιφέρειά του.

Κάποιες σχέσεις ανάμεσα στις προηγούμενες έννοιες δίνονται στο ακόλουθο.

Θεώρημα. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, και $A \subset X$. Τότε:*

(1) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.
(2) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.
(3) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Απόδειξη.

(1) Το $X \setminus A^\circ$ είναι κλειστό υπερσύνολο τού $X \setminus A$, άρα $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus A^\circ$. Έστω τώρα $x \in X \setminus A^\circ$. Τότε $x \notin A^\circ$, άρα για κάθε $r > 0$ έχουμε $D(x, r) \not\subset A$, δηλαδή $D(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Επομένως $x \in \overline{X \setminus A}$.

(2) Εφαρμόζουμε το (1) με το $X \setminus A$ στη θέση τού A.

(3) Έχουμε

$$\begin{aligned}\partial(X \setminus A) &= \overline{X \setminus A} \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{X \setminus A} \cap (X \setminus (X \setminus A)^\circ) = (X \setminus A^\circ) \cap (X \setminus (X \setminus \overline{A}))\\ &= (X \setminus A^\circ) \cap \overline{A} = \overline{A} \setminus A^\circ = \partial A.\end{aligned}$$

□

Ισοδύναμες μετρικές

Αν ένα σύνολο X έχει περισσότερες από μια μετρικές, ας πούμε $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, τότε μερικές φορές, για συντομία, θα λέμε ότι ένα υποσύνολο τού X είναι ρ_k-ανοιχτό ή ρ_k-κλειστό, αν είναι ανοιχτό ή κλειστό αντίστοιχα, ως προς την ρ_k.

Θεώρημα. *Έστω X ένα σύνολο και ρ_1, ρ_2 δυο μετρικές στο X. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) *Ένα σύνολο είναι ρ_1-ανοιχτό αν και μόνο αν είναι ρ_2-ανοιχτό.*
(2) *Μια ακολουθία συγκλίνει ως προς την ρ_1 αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την ρ_2.*
(3) *Ένα σύνολο είναι ρ_1-κλειστό αν και μόνο αν είναι ρ_2-κλειστό.*

Απόδειξη.

(1)⇒(2) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&x_n \xrightarrow{\rho_1} x \\
&\Leftrightarrow \text{Για κάθε } \rho_1\text{-ανοιχτό σύνολο } A \text{ με } x \in A, \text{ υπάρχει } n_0 \text{ τέτοιο ώστε } x_n \in A \text{ για κάθε } n \geq n_0 \\
&\Leftrightarrow \text{Για κάθε } \rho_2\text{-ανοιχτό σύνολο } A \text{ με } x \in A, \text{ υπάρχει } n_0 \text{ τέτοιο ώστε } x_n \in A \text{ για κάθε } n \geq n_0 \\
&\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_2} x
\end{aligned}$$

(2)⇒(3) Ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του, ανήκει στο σύνολο. Επομένως αν υποθέσουμε ότι οποιαδήποτε ακολουθία συγκλίνει ως προς την ρ_1 αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την ρ_2, έχουμε ότι ένα σύνολο είναι κλειστό ως προς την ρ_1 αν και μόνο αν είναι κλειστό ως προς την ρ_2.

(3)⇒(1) Ένα σύνολο είναι ανοιχτό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι κλειστό.

□

Ορισμός. *Δυο μετρικές οι οποίες ικανοποιούν οποιαδήποτε από τις συνθήκες τού προηγούμενου θεωρήματος ονομάζονται ισοδύναμες.*

Θεώρημα (Κριτήριο Hausdorff)**.** *Δυο μετρικές ρ_1 και ρ_2 σε κάποιο σύνολο X είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε $D_1(x, \delta_1) \subset D_2(x, \varepsilon)$ και $D_2(x, \delta_2) \subset D_1(x, \varepsilon)$, όπου D_1 και D_2 είναι οι ανοιχτοί δίσκοι ως προς τις ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα.*

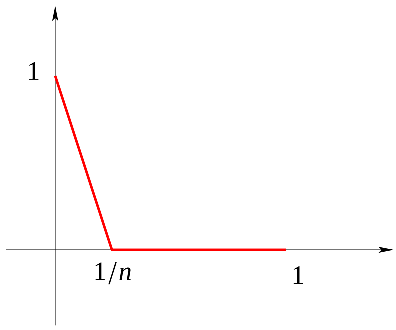
Απόδειξη. Έστω ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες. Ο δίσκος $D_2(x, \varepsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο ως προς την ρ_2 άρα και ως προς την ρ_1, επομένως υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $D_1(x, \delta_1) \subset D_2(x, \varepsilon)$. Ομοίως δείχνουμε ότι $D_2(x, \delta_2) \subset D_1(x, \varepsilon)$ χρησιμοποιώντας ότι ο D_1 είναι ανοιχτός ως προς την ρ_2.

Αντίστροφα, έστω ότι το A είναι ρ_1-ανοιχτό, και $x \in A$ τυχόν. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D_1(x, \varepsilon) \subset A$. Από υπόθεση, υπάρχει $\delta_2 > 0$ με $D_2(x, \delta_2) \subset D_1(x, \varepsilon) \subset A$. Αφού το x ήταν τυχόν, το A είναι ρ_2-ανοιχτό. Ανάλογα δείχνουμε ότι αν ένα σύνολο είναι ρ_2-ανοιχτό, τότε είναι και ρ_1-ανοιχτό. □

Παραδείγματα.

(1) Στον $\mathbb{R}^N$ οι μετρικές d_1, d_2 και d_∞ είναι ισοδύναμες διότι $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{N} d_\infty$ και $d_\infty \leq d_1 \leq N d_\infty$, έτσι η σύγκλιση ως προς κάποια από τις μετρικές, είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση ως προς όλες τις υπόλοιπες.
(2) Στο σύνολο $C([0, 1])$, οι μετρικές d_1 και d_∞ δεν είναι ισοδύναμες. Πράγματι, αν θέσουμε

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$



τότε

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^{1/n} (1 - nt)dt = \frac{1}{2n} \to 0,$$

άρα $f_n \xrightarrow{d_1} 0$. Αλλά η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην ασυνεχή συνάρτηση

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases},$$

επομένως δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε καμία συνάρτηση, άρα δεν συγκλίνει σε καμία συνάρτηση ως προς την d_∞, αφού η σύγκλιση ως προς την d_∞ είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Παρατηρήστε όμως ότι $d_1(f, g) \leq d_\infty(f, g)$, επομένως αν μια ακολουθία συγκλίνει ως προς την d_∞ τότε συγκλίνει και ως προς την d_1.

Υπόχωροι

Αν ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και $Y \subset X$, τότε το Y μπορεί να θεωρηθεί και αυτό μετρικός χώρος με μετρική τον περιορισμό τής d στο $Y \times Y$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο Y είναι υπόχωρος τού X. Αν $y \in Y$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $D_Y(y, r)$ για τον ανοιχτό δίσκο στον Y, και $D_X(y, r)$ για τον ανοιχτό δίσκο στον X. Δηλαδή

$$D_X(y, r) = \{z \in X : d(y, z) < r\}$$
$$D_Y(y, r) = \{z \in Y : d(y, z) < r\} = Y \cap D_X(y, r).$$

Θεώρημα. *Έστω X μετρικός χώρος, $Y \subset X$, και $A \subset Y$.*

(1) *Το A είναι ανοιχτό στον Y αν και μόνο αν υπάρχει G ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $A = Y \cap G$.*
(2) *Το A είναι κλειστό στον Y αν και μόνο αν υπάρχει F κλειστό στον X τέτοιο ώστε $A = Y \cap F$.*

Απόδειξη.

(1) Αν το A είναι ανοιχτό στον Y, τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο ώστε $D_Y(x, r_x) \subset A$. Επομένως

$$A = \bigcup_{x \in A} D_Y(x, r_x) = Y \cap \bigcup_{x \in A} D_X(x, r_x) = Y \cap G,$$

όπου το G είναι ανοιχτό στον X.

Αντίστροφα, έστω $A = Y \cap G$, για κάποιο G ανοιχτό στον X, και έστω $x \in A$ τυχόν. Τότε $x \in G$, και αφού το G είναι ανοιχτό στον X, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D_X(x, r) \subset G$. Επομένως

$$D_Y(x, r) = Y \cap D_X(x, r) \subset Y \cap G = A.$$

Άρα το A είναι ανοιχτό στον Y.

(2) Το A είναι κλειστό στον $Y \Leftrightarrow$ το $Y \setminus A$ είναι ανοιχτό στον $Y \Leftrightarrow Y \setminus A = Y \cap G$ για κάποιο G ανοιχτό στον $X \Leftrightarrow A = Y \cap F$ για κάποιο F κλειστό στον X.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Αν το Y είναι ανοιχτό στον X, τότε ένα υποσύνολο $A \subset Y$ είναι ανοιχτό στον Y αν και μόνο αν είναι ανοιχτό στον X. Ομοίως με τα κλειστά.
(2) Αν ένα σύνολο είναι ανοιχτό, αντίστοιχα κλειστό, σ' ολόκληρο τον χώρο, τότε είναι ανοιχτό, αντίστοιχα κλειστό, σε κάθε υπόχωρο. Το αντίστροφο, όπως φαίνεται από τα παραδείγματα παρακάτω, δεν ισχύει.

Παραδείγματα.

(1) Αν $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 2]$, και $A = [0, 1)$, τότε το A είναι ανοιχτό στον Y διότι $A = Y \cap (-666, 1)$. Φυσικά, το A δεν ανοιχτό στον X.
(2) Αν $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$ (ο άξονας των x), και $A = (-1, 1) \times \{0\}$ (ένα ανοιχτό διάστημα πάνω στον άξονα των x), τότε το A είναι ανοιχτό στον Y αφού $A = Y \cap D_X((0, 0), 1)$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το A δεν είναι βέβαια ανοιχτό σ' ολόκληρο τον χώρο X. Στην πραγματικότητα, κανένα υποσύνολο τού Y δεν είναι ανοιχτό στον X γιατί κανένα υποσύνολο μιας ευθείας δεν μπορεί να περιέχει έναν 2-διάστατο δίσκο.
(3) Αν $X = \mathbb{R}$ και $Y = \mathbb{Z}$, τότε κάθε μονοσύνολο $\{n\}$, $n \in Y$, είναι ανοιχτό στον Y, διότι

$$\{n\} = Y \cap (n - 1/8, n + 1/8).$$

Επομένως κάθε υποσύνολο τού Y είναι ανοιχτό στον Y. Παρατηρήστε και εδώ, ότι κανένα υποσύνολο τού Y δεν είναι ανοιχτό στον X.

Διαχωρισιμότητα

Ορισμός. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X ονομάζεται πυκνό, αν $\overline{A} = X$. Ο X ονομάζεται διαχωρίσιμος, αν έχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο.*

Παρατηρήσεις.

(1) Το A είναι πυκνό αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία σημείων τού A η οποία συγκλίνει στο x.

(2) Το A είναι πυκνό αν και μόνο αν κάθε περιοχή κάθε σημείου τού X τέμνει το A. Δηλαδή για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y \in A$ με $d(x, y) < \varepsilon$.

Παραδείγματα.

(1) Το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική είναι διαχωρίσιμος χώρος, αφού $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(2) Ένας διακριτός χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν το X είναι αριθμήσιμο. Αυτό προκύπτει από το ότι σ' ένα διακριτό χώρο το μοναδικό πυκνό σύνολο είναι ο ίδιος ο χώρος.

(3) Ο χώρος $C([a, b])$ με την μετρική d_∞ είναι διαχωρίσιμος, διότι, από το θεώρημα τού Weierstrass, το σύνολο όλων των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές είναι πυκνό.

Θεώρημα. *Αν ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος και $Y \subset X$, τότε και ο Y είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο τού X. Για κάθε $y \in Y$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n(y, k) \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $d(x_{n(y,k)}, y) < 1/k$. Για κάθε k, το σύνολο $\{n(y, k) : y \in Y\}$ είναι αριθμήσιμο γιατί είναι υποσύνολο τού $\mathbb{N}$. Επομένως υπάρχουν $y_k^j \in Y$, $j \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\{n(y, k) : y \in Y\} = \{n(y_k^j, k) : j \in \mathbb{N}\}$. Ισχυριζόμαστε ότι το αριθμήσιμο σύνολο $\{y_k^j : j, k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο Y. Πράγματι, έστω $y \in Y$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε k έτσι ώστε $1/k < \varepsilon/2$, και j ώστε $n(y, k) = n(y_k^j, k)$. Τότε

$$d(y, y_k^j) \leq d(y, x_{n(y,k)}) + d(x_{n(y_k^j,k)}, y_k^j) < 1/k + 1/k < \varepsilon.$$

□

Θεώρημα (Lindelof)**.** *Έστω X διαχωρίσιμος, και $A_i \subset X$, $i \in I$, μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων. Τότε υπάρχει $J \subset I$ αριθμήσιμο τέτοιο ώστε $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in J} A_i$.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο τού X. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathscr{D}$ όλων των ανοιχτών δίσκων τής μορφής $D(x_n, 1/k)$, $n, k \in \mathbb{N}$. Η $\mathscr{D}$ είναι αριθμήσιμη, άρα $\mathscr{D} = \{D_m : m \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε τώρα $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $i(x) \in I$ τέτοιο ώστε $x \in A_{i(x)}$. Επιλέγουμε $m(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x \in D_{m(x)} \subset A_{i(x)}$. Η οικογένεια $\{m(x) : x \in A\}$ είναι αριθμήσιμη, άρα υπάρχουν $x_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\{m(x) : x \in A\} = \{m(x_j) : j \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε $J = \{i(x_j) : j \in \mathbb{N}\}$. Τότε $A = \bigcup_{i\in J} A_i$. □

Πληρότητα

Ορισμός. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μια ακολουθία $x_n \in X$ ονομάζεται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \geq n_0$ έχουμε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ο X λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Παρατήρηση. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy. Αυτό προκύπτει άμεσα από την τριγωνική ανισότητα

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x).$$

Παραδείγματα.

(1) Στην περίπτωση τού $\mathbb{R}$ με την συνηθισμένη μετρική, ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy συμπίπτει με τον γνωστό από την Ανάλυση αντίστοιχο ορισμό. Έτσι το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης χώρος.

(2) Ο $\mathbb{R}^N$ με την συνηθισμένη μετρική d_2 είναι πλήρης χώρος. Πράγματι, αν x_n είναι μια ακολουθία Cauchy, τότε από τη σχέση $|x_n(k) - x_m(k)| \leq d_2(x_n, x_m)$ έπεται ότι, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, N$, η $x_n(k)$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$, άρα συγκλίνει. Επομένως η x_n συγκλίνει διότι η σύγκλιση ως προς την d_2 είναι ισοδύναμη με την κατά συντεταγμένη σύγκλιση.

(3) Το $\mathbb{Q}$ με την συνηθισμένη μετρική δεν είναι πλήρης χώρος, διότι αν q_n είναι μια ακολουθία ρητών η οποία συγκλίνει σε κάποιον άρρητο, τότε η q_n είναι Cauchy, αλλά δεν συγκλίνει στο $\mathbb{Q}$.

(4) Ομοίως, το $(0, 1)$ με την συνηθισμένη μετρική δεν είναι πλήρης χώρος, γιατί η $1/n$ είναι Cauchy και δεν συγκλίνει σε σημείο τού χώρου.

(5) Ο χώρος $(C([a, b]), d_\infty)$ είναι πλήρης. Πράγματι, αν f_n είναι μια ακολουθία Cauchy, τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d_\infty(f_n, f_m),$$

άρα η $f_n(x)$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ για κάθε x, επομένως συγκλίνει. Θέτουμε $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού η f_n είναι Cauchy, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Άρα $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και κάθε x. Παίρνοντας όριο στην προηγούμενη ανισότητα καθώς $m \to +\infty$, έχουμε ότι $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε x. Επομένως

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Αυτό δείχνει ταυτόχρονα ότι $f \in C([a, b])$ και ότι $f_n \to f$ ως προς την d_∞ (το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, και η σύγκλιση ως προς την d_∞ είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη σύγκλιση).

(6) Ο χώρος $C([-1, 1], d_1)$ δεν είναι πλήρης. Πράγματι, θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Η f_n είναι Cauchy διότι

$$d_1(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|,$$

επομένως, για δεδομένο ε, αν επιλέξουμε n_0 με $1/n_0 < \varepsilon$, τότε για κάθε $m, n \geq n_0$ έχουμε $d_1(f_n, f_m) < \varepsilon$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f_n \xrightarrow{d_1} f$ για κάποια συνεχή f. Τότε για κάθε c με $0 < c < 1$ και κάθε n με $1/n < c$ έχουμε

$$\int_{-1}^{0} |f| = \int_{-1}^{0} |f - f_n| \leq d_1(f_n, f) \to 0,$$

και
$$\int_c^1 |f-1| = \int_c^1 |f-f_n| \leq d_1(f_n,f) \to 0.$$
Συνεπώς
$$\int_{-1}^0 |f| = \int_c^1 |f-1| = 0.$$
Αφού η f είναι συνεχής, πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο $[-1,0]$, και ταυτοτικά ίση με 1 στο $[c,1]$. Εφ' όσον το $0<c<1$ ήταν αυθαίρετο, έχουμε ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο $[-1,0]$, και ταυτοτικά ίση με 1 στο $(0,1]$, άτοπο διότι υποθέσαμε ότι η f είναι συνεχής.

Θεώρημα. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και $Y \subset X$ κλειστός υπόχωρος. Τότε ο Y είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω x_n μια ακολουθία Cauchy στον Y. Τότε η x_n είναι Cauchy στον X, άρα συγκλίνει σε κάποιο x. Αφού ο Y είναι κλειστός, έχουμε $x \in Y$. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα, όπως δείχνουν τα παραδείγματα (3) και (4) παραπάνω, δεν ισχύει αν ο Y δεν είναι κλειστός.

Ορισμός. *Αν ο (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$, τότε θέτουμε $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται διάμετρος τού A.*

Θεώρημα (Cantor)**.** *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων τέτοια ώστε $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ και $A_{n+1} \subset A_n$ για κάθε n. Τότε υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{x_0\}$.*

Απόδειξη. Για κάθε n επιλέγουμε $x_n \in A_n$. Τότε η x_n είναι Cauchy. Πράγματι, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\operatorname{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon$. Τότε για κάθε $n, m \geq n_0$ τα x_n και x_m ανήκουν στο A_{n_0}, άρα
$$d(x_n,x_m) \leq \operatorname{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon.$$
Αφού ο X είναι πλήρης, η x_n συγκλίνει σε κάποιο x_0. Τώρα, για κάθε k η ακολουθία $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$ ανήκει στο A_k και συγκλίνει στο x_0. Αλλά το A_k είναι κλειστό, επομένως το x_0 ανήκει στο A_k. Έτσι, το x_0 ανήκει στην τομή όλων των A_k. Αν, τέλος, υποθέσουμε ότι κάποιο άλλο y_0 ανήκει στην τομή, τότε έχουμε ότι τα x_0 και y_0 ανήκουν σε όλα τα A_n, άρα $d(x_0,y_0) \leq \operatorname{diam}(A_n) \to 0$. Συνεπώς $d(x_0,y_0)=0$, επομένως $x_0 = y_0$. □

Θεώρημα (Baire)**.** *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και $G_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία ανοιχτών και πυκνών συνόλων. Τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ είναι πυκνό σύνολο.*

Απόδειξη. Θέτουμε $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Θα δείξουμε ότι το G είναι πυκνό. Αρκεί να δείξουμε ότι για το τυχόν μη κενό ανοιχτό $U \subset X$, έχουμε $U \cap G \neq \emptyset$. Αφού το G_1 είναι ανοιχτό και πυκνό, το $U \cap G_1$ είναι ανοιχτό και μη κενό, άρα υπάρχει ανοιχτός δίσκος D_1 τέτοιος ώστε $\overline{D}_1 \subset U \cap G_1$ και $\operatorname{diam}\left(\overline{D}_1\right) \leq 1$. Ομοίως, Αφού το G_2 είναι ανοιχτό και πυκνό, το $D_1 \cap G_2$ είναι ανοιχτό και μη κενό, άρα υπάρχει ανοιχτός δίσκος D_2 τέτοιος ώστε $\overline{D}_2 \subset D_1 \cap G_2$ και $\operatorname{diam}\left(\overline{D}_2\right) \leq 1/2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία δίσκων D_n έτσι ώστε $\overline{D}_n \subset D_{n-1} \cap G_n$ και $\operatorname{diam}\left(\overline{D}_n\right) \leq 1/n$. Από το θώρημα Cantor, η τομή $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{D}_n$ είναι μη κενή (στην πραγματικότητα είναι μονοσύνολο). Αλλά $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{D}_n \subset U \cap G$, άρα $U \cap G \neq \emptyset$. □

Παρατήρηση. Η υπόθεση τής πληρότητας είναι απαραίτητη στα δυο προηγούμενα θεωρήματα. Για παράδειγμα στον μη πλήρη χώρο $(0,2)$ με τη συνηθισμένη μετρική, η φθίνουσα ακολουθία $A_n = (0,1/n]$ αποτελείται από κλειστά σύνολα (στο $(0,2)$!), η διάμετρός τους τείνει στο μηδέν, αλλά η τομή τους είναι κενή. Επίσης, στο $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ με τη συνηθισμένη μετρική, αν θέσουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$, τότε τα G_n είναι ανοιχτά (στο $\mathbb{Q}$!) και πυκνά, αλλά η τομή τους είναι κενή.

Σύνολα F_σ και G_δ - Σύνολα 1ης και 2ης κατηγορίας

Ορισμός. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X ονομάζεται:*

- *F_σ, αν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.*
- *G_δ, αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων.*
- *Πουθενά πυκνό, αν $\left(\overline{A}\right)^\circ = \emptyset$.*
- *1ης κατηγορίας, αν είναι αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων.*
- *2ης κατηγορίας, αν δεν είναι 1ης κατηγορίας.*

Παρατήρηση. Το θεώρημα Baire λέει ότι ένας πλήρης μετρικός χώρος είναι 2ης κατηγορίας. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ο X είναι πλήρης και $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, με τα A_n πουθενά πυκνά, τότε τα $X \setminus \overline{A}_n$ είναι ανοιχτά και πυκνά, άρα η τομή τους είναι πυκνή, ιδιαίτερα, είναι μη κενή. Αλλά

$$\bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus \overline{A}_n) \subset \bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \emptyset,$$

άτοπο.

Παραδείγματα.

(1) Προφανώς, σε κάθε μετρικό χώρο τα κλειστά σύνολα είναι F_σ και τα ανοιχτά G_δ.

(2) Αν το F είναι κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d), τότε είναι G_δ. Για να το αποδείξουμε, θέτουμε $G_n = \bigcup_{x\in F} D(x,1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Τα G_n είναι (ανοιχτά) υπερσύνολα τού F, άρα η τομή τους περιέχει το F. Τώρα αν κάποιο y ανήκει στην τομή $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$, τότε για κάθε n υπάρχει $x_n \in F$ με $d(x_n, y) < 1/n$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n \to y$. Αλλά το F είναι κλειστό, άρα $y \in F$. Συμπεραίνουμε ότι η τομή των G_n είναι ακριβώς το F.

(3) Το συμπλήρωμα ενός ανοιχτού συνόλου είναι κλειστό, άρα, από το προηγούμενο παράδειγμα, κάθε ανοιχτό σύνολο είναι F_σ.

(4) Στο $\mathbb{R}$ με την συνηθισμένη μετρική, το $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι F_σ διότι $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^\infty \{q_n\}$ και τα μονοσύνολα είναι κλειστά (γενικότερα, σε κάθε μετρικό χώρο τα αριθμήσιμα σύνολα είναι F_σ). Είναι 1ης κατηγορίας, γιατί τα μονοσύνολα (στο $\mathbb{R}$) είναι πουθενά πυκνά. Δεν είναι πουθενά πυκνό, γιατί είναι πυκνό. Θα δείξουμε ότι δεν είναι G_δ. Ας υποθέσουμε ότι είναι G_δ, τότε $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ όπου τα G_n είναι ανοιχτά. Έτσι

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \bigcup_{n=1}^\infty \{q_n\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty (\mathbb{R} \setminus G_n).$$

Όλα τα σύνολα στην παραπάνω ένωση είναι κλειστά, επομένως, από το θεώρημα τού Baire, κάποιο από αυτά πρέπει να έχει μη κενό εσωτερικό, διαφορετικά το $\mathbb{R}$ θα ήταν 1ης κατηγορίας. Αλλά, προφανώς $\{q_n\}^\circ = \emptyset$ για κάθε n. Επίσης, $(\mathbb{R} \setminus G_n)^\circ = \emptyset$, για κάθε n, διότι τα σύνολα αυτά αποτελούνται από άρρητους αριθμούς.

(5) Έστω (X,d), (Y,ρ) δυο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Τότε το σύνολο των σημείων συνέχειας τής f είναι G_δ. Πράγματι, για κάθε $x \in X$ και $\delta > 0$ θέτουμε

$$\tau(f,x,\delta) = \sup\{\rho(f(z), f(w)) : z, w \in D(x,\delta)\} = \operatorname{diam}(f(D(x,\delta))), \quad \tau(f,x) = \inf_{\delta>0} \tau(f,x,\delta),$$

και παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν $\tau(f,x) = 0$. Επομένως το σύνολο των σημείων συνέχειας τής f είναι

$$\{x \in X : \tau(f,x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^\infty \left\{x \in X : \tau(f,x) < \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{n=1}^\infty G_n.$$

Αλλά τα G_n είναι ανοιχτά, άρα η τομή τους είναι G_δ.

(6) Δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής μόνο στους ρητούς. Αυτό προκύπτει από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα.

Συμπάγεια

Ορισμός. *Ένας μετρικός χώρος λέγεται συμπαγής αν κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου λέγεται συμπαγές αν, ως υπόχωρος, είναι συμπαγής.*

Παραδείγματα.

(1) Το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική δεν είναι συμπαγής χώρος διότι η ακολουθία $x_n = n$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

(2) Το $[0, 1]$ είναι συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, διότι, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, κάθε ακολουθία στο $[0, 1]$ έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο $[0, 1]$.

(3) Το $(0, 1)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$, διότι όλες οι υπακολουθίες τής $x_n = 1/n$ συγκλίνουν στο 0 το οποίο δεν ανήκει στο $(0, 1)$.

(4) Το $[0, 1]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική. Πράγματι, η ακολουθία $x_n = 1/n$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία αφού σ' ένα διακριτό χώρο μόνο οι τελικά σταθερές ακολουθίες συγκλίνουν.

Θεώρημα. *Αν ο (X, d) είναι συμπαγής τότε είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω x_n μια ακολουθία Cauchy. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει μια υπακολουθία x_{k_n} και ένα σημείο $x \in X$ έτσι ώστε $x_{k_n} \to x$. Αλλά τότε

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) \to 0.$$

□

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική είναι πλήρης και όχι συμπαγής χώρος.

Θεώρημα. *Έστω A συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Τότε το A είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \to x$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} και $y \in A$ με $x_{k_n} \to y$. Επομένως η x_{k_n} συγκλίνει στο x και στο y. Από μοναδικότητα ορίου έχουμε $x = y$, άρα $x \in A$, συνεπώς το A είναι κλειστό. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το A δεν είναι φραγμένο και ας σταθεροποιήσουμε κάποιο $x_0 \in X$. Τότε για κάθε n έχουμε ότι $A \not\subset D(x_0, n)$, διαφορετικά το A θα ήταν φραγμένο. Επομένως υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ με $d(x_n, x_0) \geq n$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} και $x \in A$ έτσι ώστε $x_{k_n} \to x$. Αλλά τότε

$$k_n \leq d(x_{k_n}, x_0) \leq d(x_{k_n}, x) + d(x, x_0).$$

Αυτό είναι άτοπο γιατί το αριστερά μέλος τείνει στο $+\infty$, ενώ το δεξιά τείνει στο $d(x, x_0)$. □

Το παράδειγμα (4) παραπάνω δείχνει ότι το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος γενικά δεν ισχύει. Παρ' όλα αυτά έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Αν το A είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}^N$ με την συνηθισμένη μετρική, τότε το A είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Για απλότητα, δίνουμε την απόδειξη στην περίπτωση $N = 2$. Έστω $(x_n, y_n) \in A$ μια ακολουθία. Τότε η x_n είναι φραγμένη, άρα από Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} και $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $x_{k_n} \to x$. Ομοίως, η y_{k_n} είναι φραγμένη, άρα υπάρχει υπακολουθία $y_{\ell_{k_n}}$ και $y \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $y_{\ell_{k_n}} \to y$. Επομένως $x_{\ell_{k_n}} \to x$ και $y_{\ell_{k_n}} \to y$, δηλαδή $(x_{\ell_{k_n}}, y_{\ell_{k_n}}) \to (x, y)$. Αφού το A είναι κλειστό, έχουμε $(x, y) \in A$. Συμπεραίνουμε ότι το A είναι συμπαγές. □

Θεώρημα. *Έστω A συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X, και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι φραγμένη και παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη και παίρνει μέγιστη τιμή. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $f(x_n) > n$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} και $x \in A$ έτσι ώστε $x_{k_n} \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, $f(x_{k_n}) \to f(x)$. Άρα η $f(x_{k_n})$ είναι φραγμένη, άτοπο αφού $f(x_{k_n}) > k_n$. Θέτουμε τώρα $s = \sup f(A)$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $s - 1/n < f(x_n) \leq s$. Άρα $f(x_n) \to s$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία x_{ℓ_n} και $\xi \in A$ έτσι ώστε $x_{\ell_n} \to \xi$, επομένως, λόγω συνέχειας, $f(x_{\ell_n}) \to f(\xi)$. Απ' την άλλη, $f(x_{\ell_n}) \to s$, επομένως, από μοναδικότητα ορίου, $f(\xi) = s = \sup f(A)$. Αυτό σημαίνει ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο ξ. Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι κάτω φραγμένη και παίρνει ελάχιστη τιμή. □

Θεώρημα. *Έστω (X, d), (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αν ο X είναι συμπαγής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθίες $x_n, y_n \in X$ τέτοιες ώστε $d(x_n, y_n) < 1/n$ και $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν υπακολουθίες x_{k_n}, y_{k_n} και σημεία $x, y \in X$ έτσι ώστε $x_{k_n} \to x$ και $y_{k_n} \to y$. Παρατηρούμε ότι

$$d(x, y) \leq d(x, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, y_{k_n}) + d(y_{k_n}, y) \to 0.$$

Άρα $x = y$. Τώρα, η f είναι συνεχής, επομένως $f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(y_{k_n}) \to f(y) = f(x)$. Συνεπώς

$$\varepsilon \leq \rho(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \leq \rho(f(x_{k_n}), f(x)) + \rho(f(x), f(y_{k_n})) \to 0,$$

άτοπο. □

Τα δυο προηγούμενα θεωρήματα γενικεύουν τις αντίστοιχες ιδιότητες (γνωστές από την Ανάλυση) συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

Θεώρημα. *Έστω X, Y μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αν το $A \subset X$ είναι συμπαγές, τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $f(x_n)$ μια ακολουθία στο $f(A)$. Αφού το A είναι συμπαγές υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$ για κάποιο $x \in A$. Λόγω συνέχειας, έχουμε $f(x_{k_n}) \to f(x)$, άρα το $f(A)$ είναι συμπαγές. □

Ορισμός. *Έστω X μετρικός χώρος και $A \subset X$. Μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων G_i, $i \in I$, με $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, ονομάζεται ανοιχτή κάλυψη τού A.*

Θεώρημα. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ανοιχτή κάλυψη τού X έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή αν $X = \bigcup_{i \in I} G_i$, με τα G_i ανοιχτά, τότε υπάρχει $J \subset I$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{i \in J} G_i$. Ισοδύναμα, αν υπάρχουν $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$, τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε ανοιχτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, και έστω $x_n \in X$ μια ακολουθία. Για κάθε n θέτουμε

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}.$$

Τότε τα F_n έχουν μη κενή τομή, διαφορετικά τα $X \setminus F_n$ θα αποτελούσαν ανοιχτή κάλυψη τού X, άρα, από υπόθεση, πεπερασμένο πλήθος από τα σύνολα αυτά, ας πούμε τα $X \setminus F_{n_1}, \ldots, X \setminus F_{n_N}$, θα κάλυπταν το χώρο. Αλλά η ακολουθία $X \setminus F_n$ είναι αύξουσα, επομένως το $X \setminus F_{n_N}$ θα ήταν ίσο με ολόκληρο τον χώρο, δηλαδή το F_{n_N} θα ήταν κενό, άτοπο. Επιλέγουμε τώρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Αφού $x \in F_1$, υπάρχει k_1 τέτοιο ώστε $d(x, x_{k_1}) < 1$. Αφού $x \in F_{k_1+1}$, υπάρχει $k_2 > k_1$ τέτοιο ώστε $d(x, x_{k_2}) < 1/2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $d(x, x_{k_n}) < 1/n$, το οποίο σημαίνει ότι $x_{k_n} \to x$, άρα ο X είναι συμπαγής.

Αντίστροφα, έστω ότι ο X είναι συμπαγής. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, ο χώρος καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος δίσκων ακτίνας ε. Πράγματι, αν αυτό δεν ήταν αλήθεια, τότε θα μπορούσαμε να βρούμε μια ακολουθία x_n με την ιδιότητα $x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} D(x_k, \varepsilon)$, για κάθε n. Δηλαδή οι όροι τής x_n θα είχαν ανά δύο απόσταση τουλάχιστον ε. Επομένως η x_n δεν θα είχε συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο. Έτσι για κάθε n ο χώρος καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος δίσκων ακτίνας $1/n$. Έστω A_n το σύνολο των κέντρων αυτών των δίσκων. Τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό, δηλαδή ο X είναι διαχωρίσιμος. Έστω τώρα G_i, $i \in I$, μια ανοιχτή κάλυψη τού X. Θα δείξουμε ότι έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, από το θεώρημα Lindelof, υπάρχουν $i_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{i_n}$. Αν η αρχική κάλυψη δεν είχε πεπερασμένη υποκάλυψη, θα μπορούσαμε να βρούμε μια ακολουθία $x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$, για κάθε n. Αφού ο χώρος είναι συμπαγής, θα υπήρχε μια υπακολουθία x_{m_n} και κάποιο σημείο x με $x_{m_n} \to x$. Αλλά τα G_{i_n} καλύπτουν τον X, άρα $x \in G_{i_{n_0}}$ για κάποιο i_{n_0}, επομένως θα υπήρχε n_1 τέτοιο ώστε $x_{m_n} \in G_{i_{n_0}}$ για κάθε $n \geq n_1$. Για $m_n \geq n_0$, αυτό αντιφάσκει με την επιλογή τής x_n. □

Παρατήρηση. Το επιχείρημα στην προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι ένας συμπαγής χώρος είναι διαχωρίσιμος. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα το $\mathbb{R}$ με την συνηθισμένη μετρική είναι διαχωρίσιμος, μη συμπαγής χώρος.

Παρακινούμενοι από την απόδειξη τού προηγούμενου θεωρήματος, δίνουμε τον ακόλουθο.

Ορισμός. *Ένας μετρικός χώρος λέγεται ολικά φραγμένος αν για κάθε $\varepsilon > 0$, ο χώρος καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος ανοιχτών δίσκων ακτίνας ε.*

Θεώρημα. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Απόδειξη. Αν ο X είναι συμπαγής τότε έχουμε δείξει ότι είναι πλήρης. Επίσης, όπως προκύπτει από την απόδειξη τού προηγούμενου θεωρήματος, ο X είναι ολικά φραγμένος.

Αντίστροφα, έστω ότι ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος. Θα δείξουμε ότι είναι συμπαγής. Έστω λοιπόν x_n μια ακολουθία. Αφού ο X είναι ολικά φραγμένος, καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος δίσκων ακτίνας 1. Άρα, κάποιος από αυτούς περιέχει άπειρους όρους τής x_n. Έστω D_1 ο δίσκος αυτός, και ας επιλέξουμε $x_{k_1} \in D_1$. Με την ίδια λογική, ο D_1 καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος δίσκων ακτίνας $1/2$, άρα κάποιος από αυτούς περιέχει άπειρο πλήθος από τους όρους τής x_n οι οποίοι βρίσκονται στον D_1. Έστω D_2 ο δίσκος αυτός, και $x_{k_2} \in D_2 \cap D_1$, με $k_1 < k_2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε δίσκους D_n ακτίνας $1/n$, και σημεία $x_{k_n} \in D_n \cap D_{n-1} \cap \cdots \cap D_1$, με $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$. Τότε για $n \geq m$ έχουμε $x_{k_n}, x_{k_m} \in D_m$, άρα $d(x_{k_n}, x_{k_m}) < 2/m$. Δηλαδή η x_{k_n} είναι Cauchy, επομένως συγκλίνει λόγω πληρότητας. Συνεπώς ο χώρος είναι συμπαγής. □

Παραδείγματα.

(1) Σε κάθε μετρικό χώρο, τα πεπερασμένα σύνολα είναι συμπαγή, γιατί, προφανώς, κάθε ανοιχτή κάλυψη ενός πεπερασμένου συνόλου έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

(2) Έστω X μετρικός χώρος και $x_n \in X$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \to x$ για κάποιο $x \in X$. Τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές. Πράγματι, αν G_i, $i \in I$, είναι μια ανοιχτή κάλυψη τού A, τότε το x ανήκει σε κάποιο G_{i_0}. Αλλά $x_n \to x$ και το G_{i_0} είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in G_{i_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης, υπάρχουν $i_1, i_2, \ldots, i_{n_0-1} \in I$ τέτοια ώστε $x_n \in G_{i_n}$ για $n < n_0$. Συνεπώς
$$A \subset G_{i_0} \cup G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_{n_0-1}},$$
άρα το A είναι συμπαγές.

(3) Ένας άπειρος διακριτός χώρος X δεν είναι ποτέ συμπαγής. Πράγματι, η οικογένεια $\{x\}$, $x \in X$, είναι μια ανοιχτή κάλυψη η οποία δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, αφού το X είναι άπειρο σύνολο.

Ομοιομορφισμοί και ισομετρίες

Ορισμός. *Έστω (X, d), (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση.*

(1) *Αν η f είναι 1-1, επί, συνεχής και η f^{-1} είναι συνεχής, τότε λέγεται ομοιομορφισμός. Στην περίπτωση αυτή οι X και Y λέγονται ομοιομορφικοί.*

(2) *Αν $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$, τότε η f λέγεται ισομετρία. Αν επιπλέον η f είναι επί, τότε οι X και Y λέγονται ισομετρικοί.*

Παρατηρήσεις.

(1) Στον ορισμό τού ομοιομορφισμού η απαίτηση η f^{-1} να είναι συνεχής δεν είναι περιττή, όπως απρόσεχτα θα παρατηρούσε κανείς, σκεπτόμενος την κατάσταση στον Απειροστικό Λογισμό, όπου μια συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση ορισμένη σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ έχει αυτομάτως συνεχή αντίστροφη. Στην περίπτωση γενικών μετρικών χώρων αυτό μπορεί να μην ισχύει. Για παράδειγμα, αν X είναι το $\mathbb{R}$ με την διακριτή μετρική και Y είναι το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, τότε η ταυτοτική απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής, αλλά η f^{-1} δεν είναι.

(2) Αν δυο χώροι είναι ισομετρικοί, τότε είναι ομοιομορφικοί.

(3) Αν οι X και Y είναι ομοιομορφικοί, $A \subset X$, και $x_n, x \in X$, τότε:
- Το A είναι ανοιχτό αν και μόνο αν το $f(A)$ είναι ανοιχτό.
- Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν το $f(A)$ είναι κλειστό.
- Το A είναι συμπαγές αν και μόνο αν το $f(A)$ είναι συμπαγές.
- $x_n \to x$ αν και μόνο αν $f(x_n) \to f(x)$.
- Ο X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο Y είναι διαχωρίσιμος.

(4) Αν σε κάποιο σύνολο X υπάρχουν δυο μετρικές ρ_1 και ρ_2, τότε είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν η ταυτοτική απεικόνιση $f : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ είναι ομοιομορφισμός.

(5) Αν οι X και Y είναι ισομετρικοί, τότε ο X είναι πλήρης αν και μόνο αν ο Y είναι πλήρης.

Παραδείγματα.

(1) Το $(-\pi/2, \pi/2)$ με την συνηθιμένη μετρική είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}$ με την συνηθισμένη μετρική μέσω τού ομοιομορφισμού $f(x) = \tan x$. Οι δυο χώροι δεν είναι ισομετρικοί γιατί ο ένας είναι φραγμένος ενώ ο άλλος όχι. Το παράδειμα αυτό δείχνει επίσης ότι η πληρότητα, γενικά, δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς.

(2) Κανένα κλειστό διάστημα δεν είναι ομοιομορφικό με κανένα ανοιχτό διάστημα, διότι τα κλειστά διαστήματα είναι συμπαγή, ενώ τα ανοιχτά δεν είναι.

(3) Δυο τυχόντα ανοιχτά διαστήματα (a, b) και (c, d) είναι ομοιομορφικά μέσω τού ομοιομορφισμού

$$f(x) = c + (x - a) \cdot \frac{d - c}{b - a}.$$

Παρατήρηση. Μια ιδιότητα ονομάζεται **τοπολογική**, αν διατηρείται από ομοιομορφισμούς. Οι παρατηρήσεις και τα παραδείγματα παραπάνω δείχνουν ότι η σύγκλιση ακολουθιών, η συμπάγεια και η διαχωρισιμότητα είναι τοπολογικές ιδιότητες. Ομοίως και οι έννοιες «ανοιχτό σύνολο» και «κλειστό σύνολο». Γενικότερα, οποιαδήποτε ιδιότητα μπορεί να εκφραστεί **αποκλειστικά** μέσω ανοιχτών συνόλων είναι τοπολογική. Η πληρότητα δεν είναι τοπολογική ιδιότητα.

Χώροι συνεχών συναρτήσεων

Αν ο X είναι συμπαγής χώρος, τότε με $C(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$. Αν $f, g \in C(X)$, ορίζουμε $d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$. Ακριβώς όπως στην οικεία περίπτωση $X = [a, b]$, ο $(C(X), d_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Παρατηρήστε ότι μια ακολουθία συγκλίνει ως προς την d_∞ αν και μόνο αν συγκλίνει ομοιόμορφα. Σκοπός μας στην ενότητα αυτή είναι να χαρακτηρίσουμε τα συμπαγή υποσύνολα τού $C(X)$.

Ορισμός. *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{F} \subset C(X)$ (δηλαδή μια οικογένεια συναρτήσεων) λέγεται ισοσυνεχές, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Δηλαδή, η επιλογή τού δ στον ορισμό τής συνέχειας είναι η ίδια για όλες τις συναρτήσεις τής οικογένειας.

Παραδείγματα.

(1) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο τού $C(X)$ είναι ισοσυνεχές.

(2) Στον χώρο $C([0, 1])$ θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F} = \{f_a : 0 \le a \le 666\}$, όπου $f_a(x) = \sin(ax)$. Η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής διότι για κάθε $x, y \in [0, 1]$ και κάθε $0 \le a \le 666$ έχουμε $|f_a(x) - f_a(y)| \le 666|x - y|$.

Θεώρημα (Arzela-Ascoli). *Έστω (X, d) συμπαγής χώρος και $f_n \in C(X)$ μια ακολουθία τέτοια ώστε:*

- *Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $f_n(x)$ είναι φραγμένη.*
- *Το $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές.*

Τότε η f_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (ως προς την d_∞).

Απόδειξη. Ο X είναι συμπαγής, άρα διαχωρίσιμος. Έστω λοιπόν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο τού X. Θα δείξουμε αρχικά ότι η f_n έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει για κάθε σημείο τού A. Η ακολουθία $(f_n(x_1))_{n=1}^\infty$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, άρα, από Bolzano-Weierstrass, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(f_{1,n}(x_1))_{n=1}^\infty$. Ομοίως, η $(f_{1,n}(x_2))_{n=1}^\infty$ είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(f_{2,n}(x_2))_{n=1}^\infty$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε για κάθε k μια υπακολουθία $(f_{k,n})_{n=1}^\infty$ τής $(f_{k-1,n})_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε η $(f_{k,n}(x_k))_{n=1}^\infty$ συγκλίνει. Θεωρούμε την «διαγώνια» υπακολουθία $g_n = f_{n,n}$.

$$\begin{array}{cccccc}
\boxed{g_1 = f_{1,1}} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots & f_{1,n} & \cdots \\
f_{2,1} & \boxed{g_2 = f_{2,2}} & f_{2,3} & \cdots & f_{2,n} & \cdots \\
f_{3,1} & f_{3,2} & \boxed{g_3 = f_{3,3}} & \cdots & f_{3,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \cdots & \boxed{g_n = f_{n,n}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Τότε για κάθε k, η ακολουθία $(g_n)_{n=k}^\infty$ είναι υπακολουθία τής $(f_{k,n})_{n=1}^\infty$, άρα η $(g_n(x_k))_{n=1}^\infty$ συγκλίνει (στον άπειρο πίνακα παραπάνω, η ακολουθία σε κάθε γραμμή είναι υπακολουθία τής ακολουθίας στην αμέσως προηγούμενη γραμμή. Για κάθε k, αν η ακολουθία των συναρτήσεων στην k-γραμμή υπολογιστεί στο σημείο x_k, συγκλίνει).

Δείχνουμε τώρα ότι η g_n είναι Cauchy ως προς την d_∞, άρα συγκλίνει. Έστω $\varepsilon > 0$. Από ισοσυνέχεια, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ και κάθε n, έχουμε $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon$. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν ανοιχτοί δίσκοι $D_1, D_2, \ldots, D_N$ ακτίνας $\delta/2$, οι οποίοι καλύπτουν τον χώρο. Αφού το A είναι πυκνό, για κάθε $j = 1, \ldots, N$, υπάρχει k_j τέτοιο ώστε $x_{k_j} \in D_j$. Για κάθε τέτοιο j η ακολουθία $(g_n(x_{k_j}))_{n=1}^\infty$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει $n(j)$ τέτοιο ώστε $|g_n(x_{k_j}) - g_m(x_{k_j})| < \varepsilon$ για κάθε $m, n \ge n(j)$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n(1), \dots, n(N)\}$. Έστω τώρα $x \in X$ τυχόν. Τότε το x ανήκει σε κάποιον δίσκο D_{j_0}. Έτσι για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_{k_{j_0}})| + |g_n(x_{k_{j_0}}) - g_m(x_{k_{j_0}})| + |g_m(x_{k_{j_0}}) - g_m(x)| < 3\varepsilon,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι η $(g_n(x_{k_{j_0}}))_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, και ότι $d(x, x_{k_{j_0}}) < \delta$ διότι τα δυο σημεία ανήκουν σ' έναν δίσκο ακτίνας $\delta/2$. Παίρνοντας supremum ως προς x στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι $d_\infty(g_n, g_m) \leq 3\varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$, δηλαδή η g_n είναι Cauchy ως προς την d_∞. □

Παράδειγμα. Στον χώρο $C([0, 1])$ η ακολουθία

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

δεν είναι ισοσυνεχής. Αν ήταν, τότε αφού είναι κατά σημείο φραγμένη, θα είχε συγκλίνουσα υπακολουθία, από το θεώρημα Arzela-Ascoli. Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί η f_n συγκλίνει κατά σημείο σε ασυνεχή συνάρτηση.

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι, παρά τη φαινομενική ομοιότητα, το θεώρημα Arzela-Ascoli δεν είναι ακριβώς ένα θεώρημα «τύπου Bolzano-Weierstrass». Για να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η αρχική ακολουθία δεν αρκεί να είναι φραγμένη. Πρέπει να είναι και ισοσυνεχής, το οποίο είναι μια πολύ περιοριστική απαίτηση.

Θεώρημα. *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{F} \subset C(X)$. Το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές. Θα δείξουμε ότι είναι συμπαγές. Έστω $f_n \in \mathcal{F}$. Η f_n είναι κατά σημείο σημείο φραγμένη και ισοσυνεχής, άρα, από το θεώρημα Arzela-Ascoli, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, το όριο τής οποίας ανήκει στο $\mathcal{F}$, αφού είναι κλειστό. Άρα το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές.

Αντίστροφα, αν το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και φραγμένο. Θα δείξουμε ότι είναι ισοσυνεχές. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^n D_\infty(f_k, \varepsilon)$. Αλλά το $\{f_1, \dots, f_n\}$ είναι ισοσυνεχές, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x, y με $d(x, y) < \delta$ και κάθε $1 \leq k \leq n$ έχουμε $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$. Τώρα, το τυχόν $f \in \mathcal{F}$ ανήκει σε κάποιον δίσκο $D_\infty(f_{k_0}, \varepsilon)$, επομένως για κάθε x, y με $d(x, y) < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| + |f_{k_0}(y) - f(y)| \leq 2d_\infty(f, f_{k_0}) + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| < 3\varepsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχές. □

Παρατήρηση. Το επιχείρημα στην προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό, κατά σημείο φραγμένο (δηλαδή $\sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < +\infty$ για κάθε $x \in X$), και ισοσυνεχές.

Θα δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη τού ότι αν το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό, κατά σημείο φραγμένο και ισοσυνεχές τότε είναι συμπαγές. Αφού ο $C(X)$ είναι πλήρης και το $\mathcal{F}$ κλειστό, αρκεί να δείξουμε ότι είναι ολικά φραγμένο. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού το $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχές, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$. Αφού ο X είναι συμπαγής, είναι ολικά φραγμένος, άρα υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{j=1}^n D(x_j, \delta)$. Η $\mathcal{F}$ είναι κατά σημείο φραγμένη, άρα το σύνολο

$$A = \{(f(x_1), \dots, f(x_n)) : f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{R}^n$$

είναι φραγμένο, επομένως ολικά φραγμένο (σε ευκλείδειους χώρους κάθε φραγμένο σύνολο είναι ολικά φραγμένο). Συνεπώς υπάρχουν $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε

$$A \subset \bigcup_{k=1}^m D_2((f_k(x_1), \dots, f_k(x_n)), \varepsilon/3),$$

όπου D_2 είναι ο συνηθισμένος ευκλείδειος δίσκος. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{F}$ καλύπτεται από τούς δίσκους $D_\infty(f_k, \varepsilon)$, άρα είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι, αν $f \in \mathcal{F}$, τότε υπάρχει f_k τέτοιο ώστε

$$d_2((f(x_1), \dots, f(x_n)), (f_k(x_1), \dots, f_k(x_n))) < \varepsilon/3.$$

Τώρα, το τυχόν $x \in X$ ανήκει σε κάποιο $D(x_j, \delta)$, επομένως

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Παίρνοντας supremum ως προς x βλέπουμε ότι $d_\infty(f, f_k) < \varepsilon$, άρα η f ανήκει στο $D_\infty(f_k, \varepsilon)$.

Θεώρημα (Dini). *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος, και $f_n \in C(X)$, μια μονότονη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in C(X)$ τέτοια ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε $f_n \to f$ ως προς την d_∞ (δηλαδή ομοιόμορφα).*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία f_n είναι φθίνουσα. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $f_n(x)$ συγκλίνει στο $f(x)$ για κάθε x έχουμε ότι

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) - f(x) < \varepsilon\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(f_n - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Αφού οι f_n και f είναι συνεχείς, τα G_n είναι ανοιχτά. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $X = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_{n_0}$. Αφού η ακολουθία f_n είναι φθίνουσα, η G_n είναι αύξουσα, άρα $X = G_{n_0}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε x και κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) \leq f_{n_0}(x) - f(x) < \varepsilon.$$

Παίρνοντας supremum ως προς x στην προηγούμενη σχέση, συμπεραίνουμε ότι $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $f_n \to f$. □

Ο χώρος γινόμενο

Ορισμός. *Αν (X_k, d_k), $k \in \mathbb{N}$, είναι μια ακολουθία μετρικών χώρων, ορίζουμε μια μετρική d στο καρτεσιανό γινόμενο $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$, ως εξής. Για κάθε $x = (x(k))_{k=1}^{\infty}, y = (y(k))_{k=1}^{\infty} \in X$, θέτουμε*

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(x(k), y(k))}{1 + d_k(x(k), y(k))}.$$

Η d ονομάζεται μετρική γινόμενο, και ο (X, d) χώρος γινόμενο.

Θεώρημα. *Έστω (X_k, d_k), $k \in \mathbb{N}$, μετρικοί χώροι, X το καρτεσιανό τους γινόμενο, και (X, d) ο χώρος γινόμενο. Τότε, μια ακολουθία $x_n \in X$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ ως προς την d αν και μόνο αν $x_n(k) \xrightarrow{d_k} x(k)$ για κάθε k. Δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $x_n \to x$. Σταθεροποιούμε τυχόν k και επιλέγουμε n_0 έτσι ώστε $2^k d(x_n, x) < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Για τέτοια n έχουμε

$$\frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(x_n(k), x(k))}{1 + d_k(x_n(k), x(k))} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{d_j(x_n(j), x(j))}{1 + d_j(x_n(j), x(j))} = d(x_n, x).$$

Άρα

$$d_k(x_n(k), x(k)) \leq \frac{2^k d(x_n, x)}{1 - 2^k d(x_n, x)} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $x_n(k) \to x(k)$ για κάθε k, και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε k_0 έτσι ώστε

$$\sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{d_j(x_n(j), x(j))}{1 + d_j(x_n(j), x(j))} = 0,$$

υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{d_j(x_n(j), x(j))}{1 + d_j(x_n(j), x(j))} < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως για όλα αυτά τα n παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{d_j(x_n(j), x(j))}{1 + d_j(x_n(j), x(j))} = \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{d_j(x_n(j), x(j))}{1 + d_j(x_n(j), x(j))} + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{d_j(x_n(j), x(j))}{1 + d_j(x_n(j), x(j))} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{d_j(x_n(j), x(j))}{1 + d_j(x_n(j), x(j))} + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα. Στην περίπτωση τού $\mathbb{R}^N$, η μετρική γινόμενο είναι ισοδύναμη με την συνηθισμένη μετρική d_2 διότι η σύγκλιση ως προς τις δυο μετρικές είναι ισοδύναμη με την κατά συντεταγμένη σύγκλιση. Έτσι οι δυο χώροι είναι ομοιομορφικοί. Δεν είναι ισομετρικοί αφού η μετρική γινόμενο είναι φραγμένη, ενώ η d_2 δεν είναι.

Θεώρημα. *Έστω X_k, $k \in \mathbb{N}$, συμπαγείς μετρικοί χώροι. Τότε ο χώρος γινόμενο X είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \in X$ μια ακολουθία. Θα δείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία χρησιμοποιώντας το «διαγώνιο» επιχείρημα τής απόδειξης τού θεωρήματος Arzela-Ascoli. Ο X_1 είναι συμπαγής άρα υπάρχει υπακολουθία $x_{1,n}(1)$ τής $x_n(1)$, και $x(1) \in X_1$ έτσι ώστε $\lim_n x_{1,n}(1) = x(1)$. Ομοίως, ο X_2 είναι συμπαγής άρα υπάρχει υπακολουθία $x_{2,n}(2)$ τής $x_{1,n}(2)$, και $x(2) \in X_2$ έτσι ώστε $\lim_n x_{2,n}(2) = x(2)$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε για κάθε k, μια υπακολουθία $x_{k,n}$ τής $x_{k-1,n}$, και ένα σημείο $x(k) \in X_k$ έτσι ώστε $\lim_n x_{k,n}(k) = x(k)$. Όπως στην απόδειξη τού Arzela-Ascoli, θεωρούμε την διαγώνια υπακολουθία $y_n = x_{n,n}$. Τότε $y_n(k) \to x(k)$ για κάθε k, άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, $y_n \to x$, ως προς την μετρική γινόμενο. $\square$

Το θεώρημα Stone-Weierstrass

Σύμφωνα με το θεώρημα τού Weierstrass, κάθε συνεχής συνάρτηση σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ είναι το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας πολυωνύμων. Σε ορολογία μετρικών χώρων, η κλειστότητα ως προς την μετρική d_∞ τού συνόλου των πολυωνύμων στο $[a, b]$ είναι ολόκληρος ο χώρος $C([a, b])$. Στην ενότητα αυτή θα γενικεύσουμε το θεώρημα τού Weierstrass αντικαθιστώντας το $[a, b]$ με έναν τυχόντα συμπαγή μετρικό χώρο.

Ορισμός. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{A} \subset C(X)$ λέγεται άλγεβρα, αν για κάθε $f, g \in C(X)$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε $f + g$, fg, $cf \in \mathcal{A}$. Λέμε ότι η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $f(x) \neq f(y)$. Αν η σταθερή συνάρτηση 1 ανήκει στην $\mathcal{A}$ τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα με μονάδα. Θα θεωρούμε ότι όλες οι άλγεβρες έχουν μονάδα.*

Παράδειγμα. Το σύνολο όλων των πολυωνύμων στο $[a, b]$ είναι μια άλγεβρα που διαχωρίζει τα σημεία.

Παρατηρήσεις.

(1) Αν μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x \neq y$ και κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $f(x_1) = c_1$ και $f(x_2) = c_2$. Πράγματι, επιλέγουμε $g \in \mathcal{A}$ ώστε $g(x_1) \neq g(x_2)$. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f = c_1 \frac{g - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} + c_2 \frac{g - g(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)}.$$

(2) Η κλειστότητα μιας άλγεβρας είναι άλγεβρα.

(3) Αν η $\mathcal{A}$ είναι μια κλειστή άλγεβρα, και $f \in \mathcal{A}$ τότε $|f| \in \mathcal{A}$, διότι αν θέσουμε $s = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ και $A(t) = |t|$, τότε από το θεώρημα τού Weierstrass, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων P_n τέτοια ώστε $P_n \to A$ ομοιόμορφα στο $[-s, s]$. Επομένως $P_n \circ f \to A \circ f = |f|$ ως προς την d_∞. Αλλά $P_n \circ f \in \mathcal{A}$ γιατί η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα. Άρα $|f| \in \mathcal{A}$ αφού η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή.

(4) Αν η $\mathcal{A}$ είναι μια κλειστή άλγεβρα, και $f, g \in \mathcal{A}$, τότε

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2} \in \mathcal{A}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in \mathcal{A}.$$

Θεώρημα (Stone-Weierstrass)**.** *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, και $\mathcal{A} \subset C(X)$ μια κλειστή άλγεβρα η οποία διαχωρίζει τα σημεία. Τότε $\mathcal{A} = C(X)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in C(X)$ και $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $g \in \mathcal{A}$ με $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$, άρα $g \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, αφού η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή. Σταθεροποιούμε $x \in X$ και για κάθε $y \in Y$, από την παρατήρηση (1) παραπάνω, επιλέγουμε $h_y \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $h_y(x) = f(x)$ και $h_y(y) = f(y)$. Από την συνέχεια των h_y, για κάθε y υπάρχει μια περιοχή D_y τού y τέτοια ώστε $h_y > f - \varepsilon$ στο D_y. Η οικογένεια D_y, $y \in X$, είναι μια ανοιχτή κάλυψη τού συμπαγούς X, άρα υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in X$ τέτοια ώστε $X = D_{y_1} \cup \cdots \cup D_{y_n}$. Έτσι αν θέσουμε $g_x = \max\{h_{y_1}, \ldots, h_{y_n}\}$, έχουμε ότι $g_x \in \mathcal{A}$ (παρατήρηση (4) παραπάνω), και ότι $g_x > f - \varepsilon$, $g_x(x) = f(x)$. Από την συνέχεια των g_x, έχουμε ότι για κάθε x υπάρχει μια περιοχή D'_x τού x τέτοια ώστε $g_x < f + \varepsilon$ στο D'_x. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in X$ τέτοια ώστε οι περιοχές $D'_{x_1}, \ldots, D'_{x_m}$ καλύπτουν τον X. Θέτουμε $g = \min\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_m}\}$. Τότε $g \in \mathcal{A}$ και $f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε x, άρα $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$. □

Παρατήρηση. Στην παραπάνω απόδειξη, το μόνο σημείο στο οποίο χρησιμοποιήσαμε το κλασικό θεώρημα Weierstarss, ήταν όταν δείξαμε ότι η συνάρτηση απόλυτη τιμή προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα. Αυτό είναι δυνατό να παρακαμφθεί βρίσκοντας απ' ευθείας μια συγκεκριμένη ακολουθία πολυωνύμων, ας πούμε στο $[0,1]$, η αποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\sqrt{t}$. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής. Ορίζουμε αναδρομικά

$$P_0(t) = 0, \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}[t - P_n^2(t)].$$

Τότε η P_n είναι μια αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην $\sqrt{t}$. Επομένως η $P_n \circ T$, όπου $T(x) = x^2$, συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση απόλυτη τιμή, άρα από το θεώρημα Dini, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Παράδειγμα. Το σύνολο όλων των πολυωνύμων δύο μεταβλητών στο $[a,b]\times[c,d]$, δηλαδή όλων των συναρτήσεων τής μορφής

$$f(x,y) = \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk} x^j y^k,$$

όπου $a_{jk} \in \mathbb{R}$ σταθερές, είναι άλγεβρα που διαχωρίζει τα σημεία, άρα είναι πυκνό στο $C([a,b]\times[c,d])$.