

Απειροστικός Ι (Τμήμα Α)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2017

Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών

$$x_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}, \quad y_n = \frac{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}}{n}.$$

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n) που ικανοποιεί $x_1 = 2$ και $x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

(2) (2 μονάδες) Εξετάστε για ποιά $a > 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{t^a + 1} dt.$$

(3) (1.5 μονάδες) Έστω P πολυώνυμο. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$-\log x = |P(x)|$$

έχει τουλάχιστον μία θετική πραγματική λύση.

(4) (1.5 μονάδες) (i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ce^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Βρείτε όλες τις συνεχείς $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $f(x) = \int_0^{x^2} f(\sqrt{t}) dt + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(5) (1.5 μονάδες) (i) Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in [0, 1]$ ισχύει $|e^x - e^y| \leq e|x - y|$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2$.

(6) (2.5 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{x^9}{x^{10} + 1} dx, \quad \int \cos(\log x) dx.$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx, \quad \int_0^1 \log x dx.$$

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.