

(1) (i) Ψάχνουμε για  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ώστε  $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+b}{x^2+1}$ . Με την μέθοδο που είδαμε στην τάξη βρίσκουμε  $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$ . Οπότε  $\int \frac{1}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log|x+1| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x$ .

(ii) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες βρίσκουμε  $\int \frac{\log(x^2+1)}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{\log(x^2+1)}{x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$ . Ψάχνουμε για  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ώστε  $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$ . Με την μέθοδο που είδαμε στην τάξη βρίσκουμε  $a = 0, b = -1, c = 0, d = 1$ . Οπότε  $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx = -\frac{1}{x} - \tan^{-1} x + C$  και  $\int \frac{\log(x^2+1)}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{\log(x^2+1)}{x^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \tan^{-1} x + C$ .

(2) (i) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες δύο φορές παίρνουμε  $\int \sin(\log x) dx = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - \int \sin(\log x) dx$ .  $\int \sin(\log x) dx = \frac{1}{2} x (\sin(\log x) - \cos(\log x)) + C$ .

(ii) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και χρησιμοποιώντας ότι  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  παίρνουμε

$$I_n = - \int_0^{2\pi} ((\sin x)^{n-1})' (-\cos x) dx = (n-1) \int_0^{2\pi} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

από το οποίο προκύπτει ότι  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ . Επίσης έχουμε  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  και  $I_1 = 1$ . Οπότε

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} I_{2(n-2)} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 5 \cdot 3} I_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 5 \cdot 3} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Παρόμοια παίρνουμε  $I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3} I_1 = \frac{(2n)(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3}$ .

(iii)\* Θέτουμε  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2016}}{(\cos x)^{2016} + (\sin x)^{2016}} dx$ . Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $y = \frac{\pi}{2} - x$  παίρνουμε  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{2016}}{(\cos x)^{2016} + (\sin x)^{2016}} dx$ . Άρα  $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2016} + (\sin x)^{2016}}{(\cos x)^{2016} + (\sin x)^{2016}} dx = \frac{\pi}{2}$ . Οπότε  $I = \frac{\pi}{4}$ .

(3) (i) Αν η  $f$  είναι περιττή  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx - \int_0^a f(-y) dy = -\int_{-a}^a f(y) dy = -\int_{-a}^a f(x) dx$ . Άρα  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

Έστω τώρα ότι  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$  για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ . Θέτουμε  $F(a) = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$ . Τότε  $F'(a) = f(a) + f(-a) = 0$ , άρα  $f(-a) = -f(a)$ .

(ii) Η συνάρτηση  $\frac{x^{101}}{x^{100}+1}$  είναι περιττή, άρα  $\int_{-1}^1 \frac{x^{101}}{x^{100}+1} dx = 0$  από το (i).

(4) Λόγο συμμετρίας το μήκος ισούται με  $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ . Με πράξεις βρίσκουμε  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \frac{3}{2}$ . Άρα  $L = 6$ .

---

(5) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_a^b f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n}(f(b) \sin(nb) - f(a) \sin(na)) - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

αφού  $|\frac{1}{n}(f(b) \sin(nb) - f(a) \sin(na))| \leq \frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}$  και

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |f'(x) \sin(nx)| dx \leq \frac{C}{n} \text{ όπου } C = \int_0^{2\pi} |f'(x)| dx.$$

---

(6) (i)  $\int_2^y \frac{1}{x(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log 2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log 2}$ . Άρα  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \frac{1}{\log 2}$ .

(ii)  $\int_y^2 \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log y} \xrightarrow{y \rightarrow 1^+} +\infty$ . Άρα  $\int_1^2 \frac{1}{x(\log x)^2} dx = +\infty$ .

(iii)  $\int_y^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log y} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log 2}$ . Άρα  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log 2}$ .

(iv)  $\int_0^y \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} y - \tan^{-1} 0 \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$  και  $\int_y^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2}$ .  
Άρα  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi$ .

(v) Έχουμε  $\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$  για  $x \in (0, 1]$  και το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  αποκλίνει στο  $+\infty$ . Από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε  $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx = +\infty$ .

---

(7)\* Θα δείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_1^{+\infty} \sin(x^a) dx$  συγκλίνει για κάθε  $a > 1$ . Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $y = x^a$  αρκεί να δείξουμε ότι το όριο  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\sin(y)}{y^{1-\frac{1}{a}}} dy$  υπάρχει. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες αρκεί να δείξουμε ότι το όριο  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{\cos(y)}{y^{2-\frac{1}{a}}} dy$  υπάρχει, δηλαδή ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(y)}{y^b} dy$  συγκλίνει όπου  $b = 2 - \frac{1}{a} > 1$ . Αυτό προκύπτει από το κριτήριο σύγκρισης αφού  $|\frac{\cos(y)}{y^b}| \leq \frac{1}{y^b}$  και το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^b} dy$  συγκλίνει για  $b > 1$ .

---