

## Απειροστικός Ι (Τμήμα Β)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2018

Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.<sup>1</sup>

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα όρια (όπου  $[x]$  το ακέραιο μέρος του  $x$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{[\sqrt{n}]^2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})\sqrt{n}.$$

(ii) Έστω ότι η  $(x_n)$  ικανοποιεί  $x_1 = 1$  και  $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Υπολογίστε το όριο  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

(2) (2 μονάδες) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

(3) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$e^x = x + a$$

έχει ακριβώς 2 λύσεις για  $a = 2$  και δεν έχει καμία λύση για  $a = 1/2$ .

(4) (1.5 μονάδες) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ . Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2) - f(x)), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2x) - f(x)).$$

(5) (1.5 μονάδες) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^n e^{\sqrt{t}} dt}{e^{\sqrt{n}}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

(6) (2.5 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx, \quad \int \log(1 + \sqrt{x}) dx.$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(\log x)^2} dx.$$

<sup>1</sup>Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ'ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.