ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

(1) Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ είναι άρρητος.

(2) *(i)* Δείξτε ότι το σύνολο $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο $\{\frac{m^2}{n^2} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0, \infty)$.

(3) Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες (x_n) είναι (τελικά) μονότονες; Φραγμένες;

(i) $((-1)^{n^2} n)$, *(ii)* $(\sin(n\pi/4))$, *(iii)* $(n - 2[n/2])$.

(4) *(i)* Δείξτε ότι $2^n \geq n^2$ για κάθε $n \geq 4$.

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $x_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι τελικά φθίνουσα και φραγμένη.

(5) Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες;

(i) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(6) Έστω a_n φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$x_n = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $y_n = x_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα και φραγμένη.

(7)* *(i)* Δείξτε ότι για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\big\{\{10^n \alpha\}, n \in \mathbb{N}\big\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

(ii) Δείξτε ότι για κάποιο $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύνολο $\big\{\{10^n \beta\}, n \in \mathbb{N}\big\}$ **δεν** είναι πυκνό στο $[0, 1]$.