ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Υποδείξεις.

(1) (i) Επαγωγή. Η υπόθεση για το x_1 χρειάζεται μόνο για να συγκρίνετε τα x_1 και x_2.

(ii) Επαγωγικά δείχνετε ότι $x_n \leq 1$ αν $a \leq 1$ και $x_n \geq 1$ αν $a \geq 1$ (ή απλά παρατηρήστε ότι $x_n \geq 0$). Συνδυάζοντας αυτό με το (i) έχουμε ότι η (x_n) συγκλίνει, έστω σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Παίρνοντας όρια στην αναδρομική σχέση προκύπτει ότι $x = (1+x)/2$, άρα $x = 1$.

---

(2) Αφού $\frac{1}{x_n} > 0$, από την αναδρομική σχέση προκύπτει άμεσα ότι $x_{n+1} \geq x_n$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η (x_n) δεν είναι φραγμένη. Έστω ότι είναι. Τότε η (x_n) συγκλίνει, έστω σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$ ($x > 0$ αφού $x_n \geq x_1 = 2$). Παίρνοντας όρια στην αναδρομική σχέση προκύπτει ότι $x = x + \frac{1}{x}$, άτοπο.

---

(3) (i) Αποκλίνει από το κριτήριο απόκλισης γιατί $n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \to \log(e) = 1$.

(ii) Συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης γιατί για $n \geq 2$ έχουμε $\frac{1}{n^2-2} \leq \frac{1}{n^2-\frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n^2}$.

(iii) Αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης γιατί $\sqrt{1+n^2}-n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}+n} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)n}$.

(iv) Συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης γιατί τελικά ισχύει $\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3} \leq \frac{2^n+2^n}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

---

(4) (i) Έχουμε $n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \to \log e = 1 < 2$.

(ii) Από το (i) έχουμε ότι τελικά ισχύει $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}(\log(n+1) - \log n)$ και χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης και ότι $\sum_{n=1}^{\infty}(\log(n+1) - \log n) = +\infty$.

---

(5) (i) Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Άρα $|x_n| \leq 1$ τελικά και κατά συνέπεια έχουμε $x_n^2 \leq x_n$ τελικά. Οπότε εφαρμόζεται το κριτήριο σύγκρισης.

(ii) Όχι, πχ δεν ισχύει για $x_n = \frac{1}{n}$.

---

(6) (i) $2\sqrt{x_n x_{n+1}} \leq x_n + x_{n+1}$ και κριτήριο σύγκρισης.

(ii) Όχι, πχ δεν ισχύει για $x_n = \frac{1}{n^2}$.

---

(7)* Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, από το κριτήριο σύγκρισης παίρνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| \leq \infty$ και από γνωστό θεώρημα έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ συγκλίνει. Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$ συγκλίνει, οπότε και η x_n συγκλίνει.