

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

## 4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

(1) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right), \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left( \frac{1}{n} \right),$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad (iv) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n},$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \left( \frac{1}{n^2} \right), \quad (vi) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)}.$$

(2) Εξετάστε για ποιές τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  συγκλίνουν οι σειρές:

$$(i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n \log n},$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a (\log n)^2}.$$

(3) Έστω  $p \in (0, 1)$ . Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}}{n^{1-p}} = \frac{1}{1-p}.$$

(4) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}.$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

$$(iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}.$$

(5) Έστω  $(x_n)$  ακολουθία τέτοια ώστε  $x_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n} < +\infty$$

(6)\* Έστω  $(x_n)$  ακολουθία τέτοια ώστε  $x_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ισχύει πάντα ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(x_1 + \dots + x_n)^2} < +\infty;$$

(Αν ναι απόδειξη, αν όχι αντιπαράδειγμα.)