ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

(1) (i) $y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{(\sqrt{n^2+n}+n)\sqrt{n^2+n}}$, άρα $\frac{y_n}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{2}$, οπότε η σειρά συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης (ή $y_n \leq \frac{1}{n^2}$ οπότε η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης).

(ii) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ φθίνει στο 0, άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

(iii) $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4}$, άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο λόγου.

(iv) $x_n = \frac{1}{(\log n)^n}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(\log n)^n}{(\log(n+1))^{n+1}} \leq \frac{(\log n)^n}{(\log n)^{n+1}} = \frac{1}{\log n} \to 0$, άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο λόγου. Αλλιώς: $\frac{1}{(\log n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$, για $n \geq e^2$, οπότε συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(v) $x_n = n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = n^2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 1$, άρα η σειρά αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(vi) $\int_2^M \frac{1}{t\log t\log\log t}\,dt = \log\log\log M - \log\log\log 2 \to +\infty$, άρα η σειρά αποκλίνει από το κριτήριο ολοκληρώματος.

---

(2) (i) Το κριτήριο λόγου δίνει ότι η σειρά συγκλίνει για $|a| < 1$ και αποκλίνει για $|a| > 1$. Για $a = 1$ η σειρά αποκλίνει από το κριτήριο ολοκληρώματος. Για $a = -1$ η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

(ii) Αν $a = 1$ η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο ολοκληρώματος. Αν $a > 1$ η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης, συγκρίνετε με την $\frac{1}{n^a}$. Αν $a < 1$ η σειρά αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης, συγκρίνετε με την $\frac{1}{n}$ ($n^{1-a} > (\log n)^2$ τελικά).

---

(3) Η βασική ανισότητα του κριτηρίου ολοκληρώματος δίνει ότι

$$\frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Διαιρέστε με n^{1-p} και πάρτε όρια (κριτήριο ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών).

---

(4) (i) $\frac{\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{e^{2\log n}}} = e^{2\log n - \sqrt{n}} \to 0$, αφού $2\log n - \sqrt{n} \to -\infty$ (δες Φυλλάδιο 2), άρα η σειρά συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(ii) $\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \to 1$, αφού $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \to e^0 = 1$, άρα η σειρά αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(iii) $\frac{1}{(\log n)^{\log n}} \leq \frac{1}{(e^2)^{\log n}} = \frac{1}{n^2}$ για $n \geq e^{e^2}$, άρα η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

---

(5) Θέτουμε $y_n = \frac{x_n}{1+x_n}$. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$, τότε $x_n \to 0$, οπότε $\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{1+x_n} \to 1$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} y_n < +\infty$, τότε $y_n \to 0$. Έχουμε $x_n = \frac{y_n}{1-y_n}$, οπότε $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{1-y_n} \to 1$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

---

(6)* Θέτουμε $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{x_n}{(x_1 + \cdots + x_n)^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

Η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right)$ συγκλίνει διότι τα μερικά της αθροίσματα είναι $\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_n}$ και η S_n συγκλίνει σε θετικό αριθμό ή στο $+\infty$. Από το κριτήριο σύγκρισης και η αρχική σειρά συγκλίνει.
