

## ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

(1) Για ποιες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$(i) f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

$$(ii) g(x) = \begin{cases} x^a \sin x & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

(2) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\log(x^2 + 2)}{|x| + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

είναι φραγμένη στο  $\mathbb{R}$  και ότι λαμβάνει την μέγιστη τιμή της.

(3) Βρείτε όλες τις συνεχείς  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  οι οποίες ικανοποιούν  $f(x) = f(x^2)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(4) (i) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^2 + 1 = \frac{100}{x^4 + \sin x + 1}$$

έχει τουλάχιστον 2 λύσεις.

(ii) Έστω  $P$  πολυώνυμο το οποίο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$e^x = |P(x)|$$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση.

(5) (i) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής ώστε  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{Q}$ . Δείξτε ότι  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) Έστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς ώστε  $(f(x))^2 = (g(x))^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{Q}$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ή  $f(x) = -g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(6) (i) Έστω  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής ώστε  $f(0) = f(2)$ . Δείξτε ότι υπάρχουν  $x, y \in [0, 2]$  ώστε  $x - y = 1$  και  $f(x) = f(y)$ .

(ii) Έστω  $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής ώστε  $f(0) = f(10)$ . Δείξτε ότι υπάρχουν  $x, y \in [0, 10]$  ώστε  $x - y = 1$  και  $f(x) = f(y)$ .

(7)\* Υπάρχει συνεχής  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς 2 φορές; Ακριβώς 3 φορές;