ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

(1) (i) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0^+} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι 0 για $a>0$ και δεν υπάρχει για $a<0$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν $a>0$.

(ii) Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0^+} x^a \sin x$ είναι 0 για $a>-1$ είναι 1 για $a=-1$, και είναι $+\infty$ για $a<-1$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν $a>-1$.

---

(2) Αφού $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ υπάρχει $M>0$ ώστε $0\le f(x)\le f(0)=\log 2$ για κάθε $|x|\ge M$. Από θεώρημα μεγίστου η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $[-M,M]$ έστω σε κάποιο $a\in[-M,M]$. Τότε $f(x)\le f(a)$ για κάθε $x\in[-M,M]$ και αφού $f(a)\ge f(0)$ έχουμε $0\le f(x)\le f(a)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι φραγμένη και λαμβάνει την μέγιστη τιμή της για $x=a$.

---

(3) Η υπόθεσή μας δίνει ότι $f(x)=f(\sqrt{x})$ για κάθε $x>0$. Άρα $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$ όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στο 1, και ότι $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}}=1$ για κάθε $x>0$.

---

(4) (i) $f(x)=x^2+1-\frac{100}{x^4+\sin x+1}$. $f(0)<0$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Οπότε υπάρχουν $a<0$ και $b>0$ ώστε $f(a)>0$ και $f(b)>0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα *Bolzano* στα διαστήματα $[a,0]$ και $[0,b]$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

(ii) Εάν $P=c\neq 0$ το ζητούμενο είναι προφανές. Αλλιώς $\lim_{x\to-\infty}|P(x)|=+\infty$. Θέτουμε $f(x)=e^x-|P(x)|$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και επιχειρηματολογήστε όπως πριν.

---

(5) (i) Έστω $x\in\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $x_n\in\mathbb{Q}$ με $\lim_{n\to\infty} x_n=x$. Τότε $0=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$ όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η f είναι συνεχής στο x.

(ii) Από το (i) προκύπτει ότι $(f(x))^2=(g(x))^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και αφού και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς, με χρήση του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής δείχνουμε (όπως στην τάξη) ότι η f έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και το ίδιο ισχύει για την g. Εάν έχουν το ίδιο πρόσημο παίρνουμε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ αν έχουν διαφορετικό πρόσημο παίρνουμε $f(x)=-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

---

(6) (i) Θέτουμε $g(x)=f(x+1)-f(x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει λύση στο $[0,1]$. Αν δεν ισχύει αυτό, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχουμε $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $f(0)<f(1)<f(2)$, άτοπο από την υπόθεσή μας. Παρόμοια παίρνουμε άτοπο στην δεύτερη περίπτωση.

(ii) Θέτουμε $g(x)=f(x+1)-f(x)$ και συνεχίζουμε όπως στο (i).

---

(7)* Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει συνεχής $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία να λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς 2 φορές. Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι η f λαμβάνει την τιμή 0 δύο φορές και ότι $f(0) = f(1) = 0$. Τότε η f δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, και αφού είναι συνεχής, έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

Έστω ότι είναι θετική στο $(0, 1)$ (το επιχείρημα είναι παρόμοιο αλλιώς). Υποθέτουμε ότι στο $[0, 1]$ η f λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στο σημείο $a \in (0, 1)$ και $f(a) = b > 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και την υπόθεση μας, προκύπτει ότι η f λαμβάνει όλες τις τιμές στο $(0, b)$ ακριβώς μία φορά σε καθένα από τα διαστήματα $(0, a)$ και $(a, 1)$ (και άρα η f λαμβάνει την τιμή b μόνο μία φορά στο $(0, 1)$). Από αυτό και την υπόθεση μας προκύπτει ότι η f είναι αρνητική στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(1, +\infty)$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η f παίρνει την τιμή b ακριβώς μία φορά στο σημείο a, άτοπο.

Κατασκευάστε μία τμηματικά γραμμική συνάρτηση και συνεχή $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς 3 φορές.
