ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Υποδείξεις.

(**1**) Για $x \neq 0$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, οπότε αρκεί να εξετάσουμε το σημείο $x = 0$. Το όριο $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{a-1} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ υπάρχει (και ισούται με 0) αν και μόνο αν $a > 1$. Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη αν και μόνο αν $a > 1$ με παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^{a-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Όπως πριν δείχνουμε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν $a > 3$.

(**2**) Δείχνουμε την ανισότητα επαγωγικά. Για $n = 1$ το είδαμε στο μάθημα. Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για n, θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$. Θέτουμε $f(x) = e^x - 1 - x - \cdots - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Έχουμε $f'(x) = e^x - 1 - x - \cdots - \frac{x^n}{n!}$ και η επαγωγική υπόθεση δίνει $f'(x) \geq 0$ για $x \geq 0$, δηλαδή η f είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε $f(x) \geq f(0) = 0$.

(**3**) Έστω ότι οι ακμές έχουν μήκος x, x, y. Αφού ο όγκος είναι 1 παίρνουμε $x^2 y = 1$, άρα η επιφάνεια είναι $2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)$. Η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $(0, 1)$ και αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Άρα λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x = 1$ και αυτή είναι 6.

(**4**) Θέτουμε $f(x) = x - \sin x$. Τότε $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα $f(x) \geq f(0) = 0$ για $x \geq 0$.

Θέτουμε $g(x) = \frac{2}{\pi} x - \sin x$. Τότε $g'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos x$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε $g'(x_0) = 0$. Τότε η g είναι φθίνουσα στο $[0, x_0]$ και αύξουσα στο $[x_0, \frac{\pi}{2}]$. Άρα για $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ έχουμε $g(x) \leq \max\{g(0), g(\frac{\pi}{2})\} = 0$.

(**5**) Θέτουμε $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)$. Η υπόθεση μας δίνει την ανισότητα $\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \leq \left|\frac{\sin h}{h}\right|$. Παίρνοντας όρια καθώς $h \to 0$ συμπεραίνουμε ότι $|f'(0)| \leq 1$, το οποίο δίνει το ζητούμενο άμεσα.

(**6**) (*i*) Έχουμε $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$. Εάν $h(x) = f'(x)x - f(x)$, τότε $h'(x) = f''(x)x > 0$ για $x > 0$. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα $h(x) > h(0) = 0$. Έπεται ότι $g'(x) > 0$ για $x > 0$ και άρα η g είναι γνησίως αύξουσα $(0, +\infty)$.

(*ii*) Για $x > 1$ το (*i*) δίνει $g(x^2) > g(x)$, οπότε $f(x^2) > xf(x)$. Επίσης αφού $f''(x) > 0$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα $f'(x) > f'(0) = 0$, άρα $f(x) > f(0) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $\frac{f(x^2)}{f(x)} > x$ οπότε το ζητούμενο προκύπτει από το κριτήριο σύγκρισης.

($\mathbf{7}$)* Θα δείξουμε ότι η f είναι ταυτοτικά 0.

1η Λύση. Αφού $f(x) = 0$ συνεπάγεται $f'(x) = 0$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου δείχνουμε ότι η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη $[0,1]$. Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \geq 0$, άρα $0 \leq f'(x) \leq 2017 f(x)$. Τότε η $g(x) = e^{-2017\,x} f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και η υπόθεσή μας δίνει ότι $g'(x) \leq 0$. Άρα η g είναι φθίνουσα στο $[0,1]$, οπότε $g(x) \leq g(0) = f(0) = 0$. Άρα $f(x) \leq 0$ και αφού $f(x) \geq 0$ παίρνουμε $f(x) = 0$.

2η Λύση. Όπως στην πρώτη λύση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq f'(x) \leq 2017 f(x)$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $f(x) > 0$ για $x \in (0,1]$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε η $g(x) = \log(f(x)) - 2017\,x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1]$ και η υπόθεσή μας δίνει ότι $g'(x) \leq 0$. Άρα η g είναι φθίνουσα στο $(0,1]$. Επίσης αφού $f(0) = 0$ έχουμε $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, το οποίο είναι άτοπο αφού η g είναι φθίνουσα.

Για την γενική περίπτωση, υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά 0 και θεωρούμε ένα μεγιστικό διάστημα (a,b), στο οποίο η f δεν μηδενίζεται. Τότε $f(a) = 0$ και επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα στο διάστημα (a,b) καταλήγουμε σε άτοπο.

3η Λύση. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά το θεώρημα μέσης τιμής και την υπόθεσή μας, παίρνουμε ότι για κάθε $x \in (0, 1/2017)$ υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in [0,x]$ ώστε

$$|f(x)| \leq x_1 |f'(x_1)| \leq 2016x|f(x_1)| \leq 2017^2 x^2 |f(x_2)| \leq \cdots \leq 2017^n x^n |f(x_n)|.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ έχουμε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, 1/2017)$. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα διαδοχικά στα διαστήματα $(1/2017, 2/2017), \ldots, (2016/2017, 1)$, και παίρνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.
