ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

(1) (i) Δείξτε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει μοναδική λύση.

(ii) Γενικότερα, δείξτε ότι εαν $0 < a < b < c$, τότε η εξίσωση $a^x + b^x = c^x$ έχει μοναδική λύση.

(2) Έστω $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x + \sqrt{x}) - f(x)\big) = 0$.

(3) Έστω p πολυώνυμο βαθμού n. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = p(x)$ έχει το πολύ $n + 1$ λύσεις.

(4) (i) Δείξτε ότι για κάθε $a > 1$ και $0 < x < y$ ισχύει ότι

$$ax^{a-1}(y - x) < y^a - x^a < ay^{a-1}(y - x).$$

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει ότι

$$(x + y)^{x+y} \leq 2^{x+y}\, x^x\, y^y.$$

(5) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos(\frac{1}{n})\big)$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(e^{\frac{1}{n}} - 1\big)$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\big)$.

(6) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε $f\big(\frac{1}{n}\big) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

(ii) Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$(iii)^*$ Εαν επιπλέον γνωρίσουμε ότι $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $f \equiv 0$.

(7)* Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 1$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f\big(\frac{a}{\sqrt{x}}\big)\Big)^x = e^{\frac{a^2}{2}}.$$