

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Β)

9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Υποδείξεις.

(1) Το θεώρημα *Taylor-Lagrange* για την $f(x) = \log(1+x)$ με κέντρο το $a = 0$ δίνει ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi_x \in (0, x)$ ώστε $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(1+\xi_x)^3} \frac{x^3}{3}$. Οι ζητούμενες ανισότητες προκύπτουν άμεσα.

(2) Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, όπως έχουμε δει, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ce^x$. Η αρχική εξίσωση για $x = 0$ δίνει $f(0) = 1$, οπότε $c = 1$.

(3) (i) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_{u=1+e^x}^{u=1+e^e} \frac{1}{u} du = \log(e+1) - \log 2$.

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = 1 - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = 1 - \log(e+1) + \log 2$.

(iii) $\int \log(x^2+1) dx = x \log(x^2+1) - \int x \frac{2x}{x^2+1} dx = x \log(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = x \log(x^2+1) - 2 + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = x \log(x^2+1) - 2 + 2 \arctan x$

(iv) $\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_{u=\sqrt{x}}^{u=\sqrt{e}} 2 \int u e^u du = 2u e^u - 2 \int e^u du = 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}$.

(v)* (Πρώτη απόδειξη) Έχουμε $\int_{-a}^a \frac{\cos x}{1+e^x} dx = \int_{-a}^a \frac{\cos u}{1+e^{-u}} du = \int_{-a}^a \frac{e^u \cos u}{1+e^u} du = \int_{-a}^a \frac{e^x \cos x}{1+e^x} dx$. Επομένως, $2 \int_{-a}^a \frac{\cos x}{1+e^x} dx = \int_{-a}^a \frac{(1+e^x) \cos x}{1+e^x} dx = \int_{-a}^a \cos x dx = 2 \sin a$. Οπότε $\int_{-a}^a \frac{\cos x}{1+e^x} dx = \sin a$. Για $a = \pi$ παίρνουμε 0.

(Δεύτερη απόδειξη) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(a) = \int_{-a}^a \frac{\cos x}{1+e^x} dx = \int_0^a \frac{\cos x}{1+e^x} dx - \int_0^{-a} \frac{\cos x}{1+e^x} dx$. Έχουμε $f'(a) = \frac{\cos a}{1+e^a} + \frac{\cos(-a)}{1+e^{-a}} = \frac{(1+e^a) \cos a}{1+e^a} = \cos a$, άρα $f(x) = \sin a + c$, και επειδή $f(0) = 0$ παίρνουμε $f(a) = \sin a$. Για $a = \pi$ έχουμε $f(\pi) = 0$.

(4) Τα ζητούμενα όρια είναι ίσα με

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n}{n}}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \dots = 2(\sqrt{2} - 1).$$

(5) (i) Αρχικά παρατηρούμε ότι $\int_x^{x+1} e^{t^2} dt \geq e^{x^2}(x+1-x) = e^{x^2}$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} e^{t^2} dt = +\infty$. Οπότε κάνοντας χρήση *l'Hospital* έχουμε ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x+1} e^{t^2} dt - \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{(x+1)^2} - e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{(x+1)^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x+1}e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = +\infty.$$

(ii) Έχουμε $\int_n^{2n} \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{1+n^3}(2n-n) \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{1+x^3} dx$ συγκλίνει.

(6) (i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα *Taylor-Lagrange* για την f στο διάστημα $[x, x+1]$ (δηλαδή με κέντρο το $a = x$). Παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) = f(x) + f'(x)(x+1-x) + \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x+1-x)^2 = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_x).$$

(ii) Εφαρμόζουμε το (i). Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $\xi_x > x$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \xi_x = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(\xi_x) \stackrel{y=\xi_x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} f''(y) = 0$. Οπότε εάν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2} f''(\xi_x)) = L - L + 0 = 0.$$

(iii) Η υπόθεση $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$ είναι αναγκαία. Πχ αν $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ όμως $f'(x) = 2 \sin(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, οπότε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ δεν υπάρχει.

(7)* Παρατηρούμε ότι $\log(\sqrt[n]{n!}) = \frac{1}{n}(\log 1 + \dots + \log n - \log n) = \frac{1}{n}(\log(\frac{1}{n}) + \dots + \log(\frac{n}{n}))$

Άρα¹ $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(\sqrt[n]{n!}) = \int_0^1 \log t dt = -1$ και κατά συνέπεια $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

¹Η σύγκλιση στο γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \log t dt$ προκύπτει από την ανισότητα $\int_0^1 \log t dt \leq \frac{1}{n}(\log(\frac{1}{n}) + \dots + \log(\frac{n}{n})) \leq \int_0^{1+\frac{1}{n}} \log t dt$. Αυτό μπορεί να δειχθεί γραφικά χρησιμοποιώντας ότι η $\log t$ είναι αύξουσα.