

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτέμβρη 2022

Διάρκεια 2 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά 1 ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Για ποια $a > 0$ είναι η f συνεχής; Παραγωγίσιμη; Παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο;

(2) (2.5 μονάδες) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\log n)^2}.$$

(3) (2.5 μονάδες) (i) Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η εξίσωση

$$x^{2022} + ax^2 - 1 = 0$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις.

(ii) Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$\int_0^x e^{t^2} dt = e^{x^2}.$$

(4) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\log(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει

$$x \log x + y \log y \geq (x+y) \log\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

(5) (2 μονάδες) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx, \quad \int x^3 \cos(x^2) dx, \quad \int \frac{1}{x^4-1} dx.$$

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.