

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

## 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

(1) Δείξτε ότι ο αριθμός  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$  είναι άρρητος.

(2) (i) Δείξτε ότι το σύνολο  $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  είναι πυκνό στο  $\mathbb{R}$ .

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο  $\{\frac{m^2}{n^2} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$  είναι πυκνό στο  $[0, \infty)$ .

(3) Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες  $(x_n)$  είναι (τελικά) μονότονες; Φραγμένες;

(i)  $((-1)^{n^2} n)$ , (ii)  $(\sin(n\pi/4))$ , (iii)  $(n - 2[n/2])$ .

(4) (i) Δείξτε ότι  $2^n \geq n^2$  για κάθε  $n \geq 4$ .

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία  $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι τελικά φθίνουσα και φραγμένη.

(5) Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες;

(i)  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(6) Έστω  $a_n$  φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$x_n = a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία  $y_n = x_{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι αύξουσα και φραγμένη.

(7)\* (i) Δείξτε ότι για κάποιο  $\alpha \in \mathbb{R}$  το σύνολο  $\{10^n \alpha, n \in \mathbb{N}\}$  είναι πυκνό στο  $[0, 1]$ .

(ii) Δείξτε ότι για κάποιο  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  το σύνολο  $\{10^n \beta, n \in \mathbb{N}\}$  **δεν** είναι πυκνό στο  $[0, 1]$ .