

(1) Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

(i) $\int \frac{1}{x^4-1} dx$, (ii) $\int \frac{\log(x^2+1)}{x^4} dx$.

(2) (i) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sin(\log x) dx$.

(ii) Εάν $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$, δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$, και υπολογίστε τα I_{10}, I_{11} .

(iii)* Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2022}}{(\cos x)^{2022} + (\sin x)^{2022}} dx$.

(3) (i) Δείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή αν και μόνο αν για κάθε $a > 0$ ισχύει $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{101}}{x^{100} + 1} dx.$$

(4) Έστω $p \in (0, 1)$. Δείξτε ότι η παρακάτω ακολουθία είναι φραγμένη

$$1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p}.$$

(5) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

(6) Εξετάστε ποια από τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν:

(i) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$, (ii) $\int_1^2 \frac{1}{x(\log x)^2} dx$, (iii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$,

(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$, (v) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$, (vi) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$.

(7)* Εξετάστε εαν συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^{2022}) dx.$$
