ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

(**1**) (i) Ψάχνουμε για $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+b}{x^2+1}$. Με την μέθοδο που είδαμε στην τάξη βρίσκουμε $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$. Οπότε $\int \frac{1}{x^4-1}\, dx = \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$.

(ii) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες βρίσκουμε $\int \frac{\log(x^2+1)}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3}\frac{\log(x^2+1)}{x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx$. Ψάχνουμε για $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$. Με την μέθοδο που είδαμε στην τάξη βρίσκουμε $a = 0, b = -1, c = 0, d = 1$. Οπότε $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx = -\frac{1}{x} - \tan^{-1} x + C$ και $\int \frac{\log(x^2+1)}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3}\frac{\log(x^2+1)}{x^3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\tan^{-1} x + C$.

(**2**) (i) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες δύο φορές παίρνουμε $\int \sin(\log x)\, dx = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - \int \sin(\log x)\, dx$. $\int \sin(\log x)\, dx = \frac{1}{2}x(\sin(\log x) - \cos(\log x)) + C$.

(ii) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και χρησιμοποιώντας ότι $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ παίρνουμε

$$I_n = -\int_0^{2\pi} ((\sin x)^{n-1})'(-\cos x)dx = (n-1)\int_0^{2\pi} (\sin x)^{n-2}\cos^2 x\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Επίσης έχουμε $I_0 = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = 1$. Οπότε

$$\begin{aligned} I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{2(n-2)} = \cdots &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 5\cdot 3} I_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 5\cdot 3}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Παρόμοια παίρνουμε $I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3} I_1 = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$.

(iii)* Θέτουμε $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2022}}{(\cos x)^{2022} + (\sin x)^{2022}}\, dx$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{\pi}{2} - x$ παίρνουμε $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{2022}}{(\cos x)^{2022} + (\sin x)^{2022}}\, dx$. Άρα $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2022} + (\sin x)^{2022}}{(\cos x)^{2022} + (\sin x)^{2022}}\, dx = \frac{\pi}{2}$. Όποτε $I = \frac{\pi}{4}$.

(**3**) (i) Αν η f είναι περιττή $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx \overset{y=-x}{=} -\int_{a}^{-a} f(-y)\, dy = -\int_{-a}^{a} f(y)\, dy = -\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$. Άρα $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

Έστω τώρα ότι $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $F(a) = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$. Τότε $F'(a) = f(a) + f(-a) = 0$, άρα $f(-a) = -f(a)$.

(ii) Η συνάρτηση $\frac{x^{101}}{x^{100}+1}$ είναι περιττή, άρα $\int_{-1}^{1} \frac{x^{101}}{x^{100}+1}\, dx = 0$ από το (i).

(**4**) Η βασική ανισότητα του κριτηρίου ολοκληρώματος δίνει ότι

$$\frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \le 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \le 1 + \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

(**5**) Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)) - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\sin(nx)\,dx \to^{n\to\infty} 0$$

αφού $\left|\frac{1}{n}(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na))\right| \leq \frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}$ και

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\sin(nx)\,dx\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(x)\,\sin(nx)|\,dx \leq \frac{C}{n} \quad \text{όπου} \quad C = \int_0^{2\pi} |f'(x)|\,dx.$$

(**6**) (i) $\int_2^y \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = -\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log 2} \to^{y\to+\infty} \frac{1}{\log 2}$. Άρα $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \frac{1}{\log 2}$.

(ii) $\int_y^2 \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log y} \to^{y\to1^+} +\infty$. Άρα $\int_1^2 \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = +\infty$.

(iii) $\int_y^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log y} \to^{y\to0^+} \frac{1}{\log 2}$. Άρα $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = -\frac{1}{\log 2}$.

(iv) $\int_0^y \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} y - \tan^{-1} 0 \to^{y\to+\infty} \frac{\pi}{2}$ και $\int_y^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} y \to^{y\to-\infty} \frac{\pi}{2}$.
Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$.

(v) Έχουμε $\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$ για $x \in (0,1]$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$. Από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx = +\infty$.

(vi) Έχουμε $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ και $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx < +\infty$. Από το κριτήριο σύγκρισης το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ συγκλίνει.

(**7**)* Θα δείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \sin(x^a)\,dx$ συγκλίνει για κάθε $a > 1$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = x^a$ αρκεί να δείξουμε ότι το όριο $\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\sin(y)}{y^{1-\frac{1}{a}}}\,dy$ υπάρχει. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες αρκεί να δείξουμε ότι το όριο $\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\cos(y)}{y^{2-\frac{1}{a}}}\,dy$ υπάρχει, δηλαδή ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(y)}{y^b}\,dy$ συγκλίνει όπου $b = 2 - \frac{1}{a} > 1$. Αυτό προκύπτει από το κριτήριο σύγκρισης αφού $\left|\frac{\cos(y)}{y^b}\right| \leq \frac{1}{y^b}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^b}\,dy$ συγκλίνει για $b > 1$.