ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021
Υποδείξεις.

(**1**) Εάν $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}} = \frac{m}{n}$, τότε $\sqrt{2} = \frac{m^3}{n^3} - 2$ είναι ρητός, άτοπο.

(**2**) (i) Εάν $a < b$, δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a < \frac{[2^n a]+1}{2^n} < b$.

(ii) Έστω $0 \leq a < b$. Υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt{a} < \frac{m}{n} < \sqrt{b}$. Τότε $a < \frac{m^2}{n^2} < b$. Διαφορετικά, εάν $a < b$, δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a < \frac{([n\sqrt{a}]+1)^2}{n^2} < b$.

(**3**) (i) $x_n = n$ για n άρτιο και $x_n = -n$ για n περιττό, άρα δεν είναι τελικά μονότονη ούτε φραγμένη.

(ii) Η (x_n) παίρνει τις τιμές 0 και 1 για άπειρα n άρα δεν είναι τελικά μονότονη, $|x_n| \leq 1$ άρα είναι φραγμένη.

(iii) $x_n = 0$ για n άρτιο και $x_n = 1$ για n περιττό, άρα δεν είναι τελικά μονότονη και είναι φραγμένη.

(**4**) (i) Με επαγωγή (θα χρειαστεί να δείξετε ότι $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ για κάθε $n \geq 4$).

(ii) Δείξτε ότι $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n \geq 4$. Από αυτό (ή από το (i)) προκύπτει ότι η x_n είναι φραγμένη.

(**5**) (i) Δείξτε ότι $x_n \geq \frac{n}{\sqrt{n+n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι $x_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(**6**) Παρατηρήστε ότι

$$y_{n+1} = x_{2n+2} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) = y_n + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq y_n$$

και ότι

$$y_n = x_{2n} = a_1 + (-a_2 + a_3) + \cdots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

(**7**)* (i) Επιλέξτε $\alpha \in [0,1]$ ώστε το δεκαδικό του ανάπτυγμα να περιέχει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ψηφίων. Πχ $\alpha = 0.123456789101112\cdots$.

(ii) Επιλέξτε $\beta \in [0,1]$ ώστε το δεκαδικό του ανάπτυγμα να μην είναι περιοδικό και να περιέχει μόνο τα ψηφία 1 και 2. Πχ $\beta = 0.121122111222\cdots$. Τότε $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $\{10^n \beta\} \in [0.1, 0.3]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
