

(1) Υπολογίστε τα όρια:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n+1}$ .

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\log n}$ .

(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{\log n}}{n}$ .

(2) Εξετάστε εάν οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν τελικά:

(i)  $2^n \geq n^{100}$ .

(ii)  $n^2 \geq 10n + (\log n)^{10}$ .

(iii)  $\sqrt{n} - \log n \sin n + 1 \geq 0$ .

(iv)  $2n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1$ .

(3) Υπολογίστε τα όρια:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2}$ .

(4) Έστω  $(x_n)$  ακολουθία ώστε  $x_n > 0$  τελικά. Υπολογίστε το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  εάν:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{1}{2}$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1+x_n} = 1$ .

(5) Υπολογίστε τα όρια:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (1^{2021} + 2^{2021} + \dots + n^{2021})$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} (1^1 + 2^2 + \dots + (n-1)^{n-1} + n^n)$ .

(6)\* (i) Δείξτε ότι αν το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2^n)$  υπάρχει, τότε είναι 0.

(ii) Δείξτε ότι το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2^n)$  δεν υπάρχει.