ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

Υποδείξεις.

(**1**) (i) $1-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = 1$.

(ii) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n+1} = \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^3 \left(1+\frac{2}{n}\right) \to e^6$

(iii) $1 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{\log n}{n}} \leq 3^{\frac{\log n}{n}}$ τελικά και $3^{\frac{\log n}{n}} \to 1$. Άρα $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\log n} \to 1$.

(iv) $\frac{(\log n)^{\log n}}{n} = \frac{e^{\log n \cdot \log\log n}}{e^{\log n}} = e^{\log n \cdot \log\log n - \log n} \to +\infty$.

(**2**) Όλες οι ανισότητες ισχύουν τελικά αφού:

(i) $\lim_{n\to\infty}(2^n - n^{100}) = \lim_{n\to\infty} 2^n \,(1-\frac{n^{100}}{2^n}) = +\infty$.

(ii) $\lim_{n\to\infty}(n^2 - 10\,n - (\log n)^{10}) = \lim_{n\to\infty} n^2\,(1-\frac{10}{n} - \frac{(\log n)^{10}}{n^2}) = +\infty$.

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} - \log n \,\sin n + 1) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(1 - \frac{\log n\,\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} 2n\,\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2\log e = 2$.

(**3**) (i) Έστω $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$. Τότε $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0$. Άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii) Έστω $x_n = \frac{2^{n^2}}{(n!)^2}$. Τότε $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{2n+1}}{(n+1)^2} \to +\infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(**4**) Έστω $y_n = \frac{x_n}{1+x_n}$. Τότε $y_n < 1$ τελικά και $x_n = \frac{y_n}{1-y_n}$.

(i) Αφού $y_n \to \frac{1}{2}$ έχουμε $x_n \to \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

(ii) Έχουμε $y_n \to 1$ και $\frac{1}{2} \leq y_n < 1$ τελικά. Άρα $x_n = \frac{y_n}{1-y_n} \geq \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-y_n} \to +\infty$.

(**5**) (i) $0 \leq \frac{1}{2^n}(1^{2021} + 2^{2021} + \cdots + n^{2021}) \leq \frac{n\,n^{2021}}{2^n} = \frac{n^{2022}}{2^n} \to 0$.

(ii)
$$1 = \frac{n^n}{n^n} \leq \frac{1}{n^n}(1^1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^{n-1} + n^n)$$
$$\leq \frac{1}{n^n}(n^{n-2} + \cdots + n^{n-2} + n^{n-1} + n^n) = \frac{n-2}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 \to 1.$$

(**6**)* (i) Έστω $\lim_{n\to\infty}\sin(2^n) = x$. Τότε $\lim_{n\to\infty}(\cos(2^n))^2 = 1-x^2$. Αφού

$$\sin(2^{n+1}) = 2\sin(2^n)\cdot\cos(2^n), \quad \cos(2^{n+1}) = (\cos(2^n))^2 - (\sin(2^n))^2,$$

έπεται (από την δεύτερη σχέση) ότι το $\lim_{n\to\infty}\cos(2^n) = y$ υπάρχει και παίρνοντας όρια στις δύο σχέσεις παίρνουμε
$$x = 2xy, \quad y = y^2 - x^2.$$
Λύνοντας το σύστημα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $x^2 + y^2 = 1$ παίρνουμε ως μοναδική λύση την $x = 0, y = 1$.

(ii) 1η Λύση. Έστω ότι το όριο υπάρχει, τότε από το (i) πρέπει να είναι 0 και επίσης $|\cos(2^n)| \to 1$, άρα $|\cos(2^n)| \geq 3/4$ τελικά. Οπότε τελικά έχουμε
$$|\sin(2^{n+1})| = 2|\sin(2^n)||\cos(2^n)| \geq \frac{3}{2}|\sin(2^n)| \geq |\sin(2^n)|.$$
Άρα η $|\sin(2^n)|$ είναι τελικά αύξουσα και συγκλίνει στο 0, άτοπο αφού δεν είναι τελικά 0 (αν ήταν, τότε το π θα ήταν ρητός).

2η Λύση. Εστω ότι το όριο υπάρχει, τότε από το (i) πρέπει να είναι 0. Τότε υπάρχουν $k_n \in \mathbb{Z}$ ώστε $\lim_{n\to\infty}(2^n - k_n\pi) = 0$ από το οποίο έπεται ότι $\lim_{n\to\infty}\|2^n\pi^{-1}\| = 0$ όπου με $\|x\|$ συμβολίζουμε την απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο. Όμως ο π^{-1} είναι άρρητος άρα στο δυαδικό του ανάπτυγμα το ζεύγος ψηφίων 10 εμφανίζεται άπειρες φορές. Οπότε $\|2^n\pi^{-1}\| \geq 1/4$ άπειρες φορές το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $\lim_{n\to\infty}\|2^n\pi^{-1}\| = 0$.
