ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

(1) Έστω ακολουθία (x_n) η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Δείξτε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα αν $a \leq 1$ και φθίνουσα αν $a \geq 1$.

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

---

(2) Έστω ακολουθία (x_n) η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

---

(3) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$.

---

(4) (i) Δείξτε ότι η ανισότητα $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{2}{n}$ ισχύει τελικά.

(ii) Κάνοντας χρήση του (i) και του ότι η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\log(n+1) - \log n)$ αποκλίνει, δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

---

(5) Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \geq 0$ τελικά.

(i) Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$, δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$.

(ii) Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

---

(6) Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \geq 0$ τελικά και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$.

(i) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}} < +\infty$.

(ii) Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n} < +\infty$;

---

(7)* Έστω (x_n) ακολουθία που ικανοποιεί την ανισότητα $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει;
